This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

32.34

Math 1008.33

From
The Fund
bequeathed by
Horace A. Haven,
of
Portsmouth, N.H.
Rec'd Aug. 29
1845.

33.22.

Die

Wahrscheinlichkeitsrechnung

in ihrer Anwendung

auf das

wissenschaftliche und practische Leben.

Von

Joseph Johann von

J. J. Littrow,

Director der Sternwarte und Professor der Astronomie an der k. k. Universität in Wien, Ritter des k. russ. St. Anna-Ordens der zweyten Classe, Mitglied mehrerer gelehrten Gesellschaften in London, Petersburg, Kasan, Palermo ꝛc.

Wien.

F. Becks Universitätsbuchhandlung.

1833.

Math 1008.33

Gedruckt
bey
A. Strauß's sel. Witwe.

Vorrede.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist eine neue, und unsern Vorgängern, so wie die Mechanik, ganz unbekannte Wissenschaft und der Theil derselben, welcher die Anwendung dieser Rechnung auf die Beobachtungen enthält und unter der Benennung der „Methode der kleinsten Quadrate“ bekannt ist, gehört ganz unseren Zeiten an, indem wir die eigentliche Ausbildung desselben vorzüglich unsern beyden Zeitgenossen, Gauß und Laplace, verdanken.

Dieses jugendliche Alter der Wissenschaft, verbunden mit den Schwierigkeiten eigener Art, welche ihr Studium darbiethet, ist ohne Zweifel die Ursache, daß sie unter uns noch so wenig bekannt ist. Ihre große Wichtigkeit macht sie aber einer besondern Berücksichtigung in einem sehr hohen Grade würdig, sowohl an sich selbst, als auch in ihren mannigfaltigen Anwendungen auf sehr viele Vorfälle des Lebens. Beynahe alle unsere menschlichen, sogenannten, Wahrheiten sind nur Wahrscheinlichkeiten und daher Gegenstände, die in das weite Gebieth dieser neuen Wissenschaft gehören.

Die hier folgenden Blätter haben den Zweck, die Leser, nicht sowohl mit den inneren Gründen, als vielmehr mit den äußerst wichtigen Anwendungen dieser Wis-

senschaft bekannter zu machen. Die erste Abtheilung, welche die eigentliche Wahrscheinlichkeitsrechnung in ihrem ganzen Umfange enthält, kann als eine freye Bearbeitung von Laplace's Essais philosophique angesehen werden, eines Werkes, das seiner großen Wichtigkeit wegen schon längst eine deutsche Uebersetzung mit Erläuterungen der schwereren Stellen verdient hätte. Die zweyte Abtheilung, welcher größtentheils die Entdeckungen unsers Gauß zu Grunde liegen, beschäftiget sich mit einem abgesonderten, aber sehr interessanten Zweige dieser Wissenschaft, mit der erwähnten Methode der kleinsten Quadrate und ihrer Anwendung auf physische und astronomische Beobachtungen. Diejenigen Leser, welche sich durch diese Betrachtungen bewogen finden, auch die inneren Gründe und Beweise der hier aufgestellten analytischen Ausdrücke näher kennen zu lernen, werden sie bey den beyden angezeigten Schriftstellern und in den schönen Aufsätzen finden, welche Dr. Hauber in Baumgartner's Zeitschrift für Physik und Mathematik bekannt gemacht hat. Mich würde es freuen, wenn ich dadurch zur weiteren Verbreitung dieser interessanten und wichtigen Kenntnisse etwas beygetragen hätte.

Wien den 18. September 1832.

Der Verfasser.

Erste Abtheilung.

Wahrscheinlichkeitsrechnung überhaupt.

Die wichtigsten Fragen, die unsere geselligen Verhältnisse, unser Leben und uns selbst betreffen, lassen sich beynahe alle auf Probleme der Wahrscheinlichkeit zurückführen. Die meisten der menschlichen Erkenntnisse sind nur Wahrscheinlichkeiten, und selbst in denjenigen, die uns Gewißheit gewähren, in den mathematischen Wissenschaften, sind die vorzüglichsten Mittel, zu dieser Gewißheit zu gelangen, Analogie und Induction, die sich beyde wieder auf Wahrscheinlichkeit gründen. Wer endlich in den ewigen und unveränderlichen Principien der Vernunft, der Gerechtigkeit und der Humanität, selbst ohne ihren tieferen Grund zu kennen, auch nur die Glücksfälle aufmerksam betrachtet, welche sie am beständigsten begleiten, wird sich von den Vortheilen, ihnen zu folgen, so wie von der Wahrscheinlichkeit der Nachtheile, die ihre Vernachlässigung beynahe immer nach sich zu ziehen pflegt, bald überzeugen.

Alle Ereignisse, selbst diejenigen, die durch ihre Geringfügigkeit uns ganz zufällig und von den großen Gesetzen der Natur völlig unabhängig erscheinen, sind doch ohne Zweifel eine eben so nothwendige Folge derselben ewigen Gesetze, als es die Bewegung der Sonne und aller Körper des Himmels nur immer seyn kann. Nur unsere Unkenntniß des Zusammenhanges dieser Erscheinungen mit jenen Gesetzen des Weltalls läßt uns die einen derselben von bestimmten Endursachen, die andern aber von dem blinden Zufalle abhängig machen, je nachdem sie in einer bestimmten und sichtbaren Aufeinanderfolge, oder aber ohne irgend eine uns bemerkbare Ordnung vor sich zu gehen scheinen. Die erwähnten, übrigens oft nur eingebildeten Endursachen werden allmählig, wie sich die Gränzen unserer Kenntnisse erweitern, immer mehr und mehr zurückgerückt und sie verschwinden nur

zu oft gänzlich vor dem klaren Blicke des Verstandes, der in den meisten dieser Endursachen nur den Ausdruck der gänzlichen Unkenntniß erblickt, die uns die wahren Ursachen jener Erscheinungen vielleicht für immer zu verbergen droht.

Jedes gegenwärtige Ereigniß muß mit einem ihm vorhergegangenen in irgend einer Verbindung stehen, da Nichts bestehen kann, ohne einen Grund seines Bestehens zu haben. Selbst unsere scheinbar gleichgültigsten Handlungen unterliegen ohne Zweifel demselben Gesetze. Der allerfreyeste Wille wird, wenn gar kein Motiv ihn bestimmt, auch keine Handlung hervorbringen können. Denn wenn alle Umstände zweyer verschiedener Verhältnisse sich durchaus gleich sind und der Wille doch unter dem einen zur Handlung übergeht und unter dem andern unthätig bleibt, so gäbe es eine Wirkung ohne Ursache, die wir wenigstens uns nicht denken können. Das Gegentheil von dieser Annahme ist offenbar nur die Folge einer Selbsttäuschung, welche die oft sehr flüchtigen, aber doch die Wahl bestimmenden Gründe, übersieht und sich überreden will, ohne Gründe und vollkommen frey gewählt zu haben.

Der gegenwärtige Zustand des Universums ist also in allen seinen, auch den scheinbar geringfügigsten Theilen, nur die Folge eines vorhergegangenen, so wie zugleich die Ursache eines künftigen Zustandes desselben. Ein Geist, der alle Kräfte kennt, von denen die Natur belebt wird, und der den gegenwärtigen Zustand aller Wesen, die sie enthält, übersieht, wird vielleicht in einem einzigen Ausdrucke der Analyse alle vergangenen und alle künftigen Erscheinungen der Natur zu umfassen im Stande seyn und die Bewegungen der großen himmlischen Körper nicht minder, als die der Wassertropfen, welche unsere Meere bilden, oder als die der kleinsten Sonnenstäubchen übersehen, welche unsere Atmosphäre erfüllen: für einen solchen Geist wäre nichts unbekannt und nichts wahrscheinlich: nur die Wahrheit selbst würde für ihn da seyn, und die Vergangenheit, wie die Zukunft, würde offen und klar vor seinen Augen liegen.

Nur in einer einzigen Wissenschaft ist es bisher dem menschlichen Geiste gelungen, uns ein, obgleich auch hier nur ein sehr schwaches Bild jener hohen Erkenntniß darzustellen. Die Astro-

nomie hat, mit Hülfe der Mechanik und der Geometrie, den gegenwärtigen und künftigen Zustand der Körper unsers Planetensystems, wenigstens in seinen großen Zügen, in einem einzigen Ausdrucke dargestellt und uns dadurch in den Stand gesetzt, auf Ereignisse in denselben zurückzugehen, die einer, in jeder andern Beziehung uns gänzlich unbekannten Periode der Menschengeschichte angehören, und wieder andere vorauszusagen, welche erst in der spätesten Folgezeit durch die Beobachtungen unserer Nachkommen ihre unbezweifelte Bestätigung erhalten werden. In allen unsern Bemühungen nach Wahrheit und nach der Erkenntniß derselben bemerken wir dieselbe Tendenz, jenem höheren Ziele nachzukommen, wenn wir gleich immer unendlich weit von ihm entfernt bleiben werden. Diese Tendenz ist es, die den menschlichen Geist auszeichnet und ihn von dem der Thiere unterscheidet: sein Fortgang in dieser Beziehung gibt den Jahrhunderten unserer Weltgeschichte und den verschiedenen Völkern, welche die Oberfläche der Erde bewohnen, ihr eigenthümliches Gepräge und den Antheil, den jedes von ihnen an der Vervollkommnung des ganzen Geschlechtes und dadurch an wahrem Ruhme anzusprechen hat.

Es ist noch nicht lange her, daß jedes ungewöhnlich trockene oder nasse Jahr, daß jede Finsterniß, jedes Nordlicht, jeder Komet, daß überhaupt eine jede ungewöhnliche Erscheinung der Natur als ein unmittelbares Zeichen des göttlichen Zorns betrachtet worden ist. Man flehte zitternd zu dem Himmel, die gedrohte Strafe abzuwenden. Warum aber bat man ihn nicht auch, den Lauf der Sonne und der Planeten zu ändern? — Die Ursache der letzteren war bekannt und Beobachtungen hatten bereits das Unnütze solcher Bitten gezeigt. Aber von jenen ersten Erscheinungen, die sich nicht so regelmäßig folgten, die nur selten wiederkamen, und deren Gründe man nicht so leicht einsehen konnte, von ihnen glaubte jeder, was ihm gut dünkte oder was seine erschreckte Einbildungskraft ihn zu glauben antrieb. So verbreitete der große Komet des Jahres 1456 Entsetzen über ganz Europa, das ohnehin durch eine verheerende Pest und durch die Fortschritte geängstiget war, welche vor Kurzem die Türken ge-

macht hatten, die das orientalische Kaiserthum zerstörten und sich nun wie ein unaufhaltbarer Strom über die Nachbarländer zu ergießen drohten. Aber wie ganz anders wurde die Erscheinung desselben Kometen zwey Jahrhunderte später aufgenommen. Newton hatte uns seitdem die Gesetze des Weltsystems bekannt gemacht und diese Kenntniß zerstreute schnell den eitlen Schrecken, den nur die Unwissenheit erzeugt hatte. Halley, der jenen Kometen i. J. 1682 beobachtet hatte, erkannte seine Identität mit den Kometen von 1607, 1531 und 1456 und wagte es sogar, seine nächste Wiederkunft auf das Jahr 1759 vorauszusagen. Clairaut berechnete späterhin die Störungen, welche dieser Komet von den beyden größten Planeten unsers Sonnensystems, von Jupiter und Saturn, erleiden mußte und bestimmte seinen nächsten Durchgang durch die Sonnennähe auf den Anfang des April d. J. 1759, eine Bestimmung, welche durch die Beobachtungen vollkommen bestätiget worden ist. Sein nächster Durchgang durch sein Perihelium wird in die Mitte Novembers des Jahres 1835 fallen.

Dieselbe Regelmäßigkeit aber, die wir in der Bewegung der Kometen kennen gelernt haben, wird ohne Zweifel auch bey allen übrigen Phänomenen der Natur statt haben, wenn sie uns gleich, so lange wir ihre Gesetze noch nicht kennen, ganz zufällig und unregelmäßig erscheinen. Die krummen Linien, welche die kleinsten Staubkörnchen oder diejenigen, welche die Elemente der Luftarten und der Dünste beschreiben, sind gewiß eben so geordnet, und eben so bestimmten und unveränderlichen Gesetzen unterworfen, als die Bahnen, welche von jenen großen Körpern des Himmels in dem Weltenraume beschrieben werden, und der Unterschied, der zwischen beyden *für uns* noch statt hat, liegt nicht in *ihnen*, sondern einzig nur in *uns* selbst, in unserer Beschränktheit, in unserer eigenen Unwissenheit.

Was wir daher Wahrscheinlichkeit nennen, hängt zum Theile von dieser Unwissenheit, zum Theile aber auch von unserer, wenn gleich nur genäherten Kenntniß der Naturgesetze ab. Die nähere Bestimmung derselben oder das Maß der Wahrscheinlich-

keit, daß irgend ein Ereigniß eintreten werde, wird offenbar das Verhältniß der Summe der Fälle, welche diesem Eintreten günstig sind, zu der Summe aller möglichen Fälle seyn', vorausgesetzt, daß diese letzten alle gleich möglich sind. Die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Ereignisses wird also im Allgemeinen in der Form eines eigentlichen Bruches dargestellt werden, dessen Zähler die Summe aller günstigen, und dessen Nenner die Summe aller möglichen Fälle enthält. Dieser Bruch nähert sich der Einheit desto mehr, je größer die Anzahl der günstigen Fälle gegen die Anzahl aller möglichen Fälle ist, und nur dann, wenn unter allen möglichen Fällen gar kein ungünstiger ist d. h. wenn alle Fälle günstig sind, wird dieser Bruch zur Einheit und die Wahrscheinlichkeit zur Gewißheit, so daß also die Einheit gleichsam das Symbol der Gewißheit ist, welcher sich die Wahrscheinlichkeit immer mehr nähert, je größer die Anzahl der günstigen Fälle zu der Anzahl aller möglichen Fälle ist. Man nennt diese die absolute Wahrscheinlichkeit. (Man sehe Anmerkung I. am Ende dieser ersten Abtheilung.)

Von ihr unterscheidet sich die relative Wahrscheinlichkeit, wo von allen möglichen Fällen durch die Natur der Aufgabe einige ausgeschlossen sind. Nennt man w und w' die absoluten Wahrscheinlichkeiten zweyer Ereignisse, so ist die relative Wahrscheinlichkeit, daß das erste dieser Ereignisse eintrete, gleich w dividirt durch die Summen der beyden absoluten Wahrscheinlichkeiten $w + w'$ (II).

Diese beyden Gattungen von Wahrscheinlichkeiten beziehen sich nur auf einzelne Fälle und sie heißen daher einfache Wahrscheinlichkeiten, während alle folgenden, die mehrere dieser Fälle umfassen, zusammengesetzte Wahrscheinlichkeiten genannt werden. Sind nämlich von N möglichen Fällen die absoluten Wahrscheinlichkeiten $w, w', w'', \ldots$ so ist die W., daß irgend einer dieser Fälle eintreffe, gleich der Summe $w + w' + w'' + \ldots$ (III).

Ist ferner w die absolute Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß dasselbe in m mal nach einander wiederholten Versuchen immer eintreffe, gleich w^m (IV).

Endlich ist die Wahrscheinlichkeit, daß mehrere Ereignisse,

deren absolute Wahrscheinlichkeiten w, w', w'' . . sind, zugleich eintreffen, gleich w.w'.w''.w''' . . . (V).

Auf diese fünf Classen lassen sich beynahe alle Aufgaben zurückführen, welche man in der Wahrscheinlichkeitsrechnung gegeben hat. Aber es wird zuweilen ein besonderer Scharfsinn erfordert, diese Classen zu unterscheiden und die Nebenbedingungen dieser Aufgaben gehörig zu erfüllen. Eine unmittelbare Folge derselben ist die Lehre von den wechselseitigen Ereignissen, wo man die Wahrscheinlichkeiten sucht, die ein Ereigniß für den Fall hat, daß ein anderes ebenfalls eingetreten oder daß das letzte nicht eingetreten ist (VI). Diese letzten Betrachtungen führen unmittelbar auf diejenigen Wahrscheinlichkeiten, welche den Berechnungen unserer Witwen- und Waiseninstitute zu Grunde liegen. Eine andere Anwendung der vorhergehenden Grundsätze bezieht sich auf die Einrichtung unserer Lotterien, deren Vor- und Nachtheile näher zu kennen vielleicht für viele nicht ohne Nutzen seyn wird (VII Bogen F). In den Anmerkungen sind alle diese Gattungen von Wahrscheinlichkeiten näher angeführt und zur größeren Deutlichkeit mit Beyspielen versehen worden.

Die bisher angeführten Wahrscheinlichkeiten setzen voraus, daß die Anzahl der möglichen Fälle, bekannt und eine endliche Größe sey. Allein es gibt noch andere Ereignisse, für welche diese Anzahl der möglichen Fälle entweder unbekannt oder auch unendlich groß ist, und die Wahrscheinlichkeit des Eintretens solcher Ereignisse zu bestimmen, erfordert ganz eigene Betrachtungen. Wir werden sie in der zweyten Abtheilung dieses Werkes, wenigstens in Beziehung auf ihre Anwendung näher kennen lernen. Hieher gehören vorzüglich die Wahrscheinlichkeiten, welche sich auf Beobachtungen oder auf wiederholte Experimente beziehen. Wenn man nämlich den Werth einer oder mehrerer Größen, die man schon aus früheren Versuchen beynahe kennt, genauer bestimmen will, so wird man so viele Beobachtungen, als möglich, zu dieser Bestimmung anwenden und da sonach die Anzahl dieser Beobachtungen gewöhnlich viel größer seyn wird, als

die Anzahl der unbekannten Größen, so wird eine Methode nothwendig, diejenigen Werthe, welche allen diesen Beobachtungen am besten entsprechen, d. h. die wahrscheinlichsten Werthe dieser Größen zu finden. Diese Untersuchungen lassen sich, mit besonderen Modificationen, beynahe auf alle Erscheinungen der Natur, auf die Phänomene der physischen und selbst der moralischen Welt anwenden und sie werden ohne Zweifel, wenn diese Theorie selbst sowohl, als auch unsere ihr zu Grunde liegenden Erfahrungen eine größere Ausbildung erhalten haben, zu den wichtigsten und interessantesten Resultaten führen. Wir wollen es versuchen, in dem Folgenden wenigstens einige derselben näher anzuzeigen.

Mitten unter den höchst veränderlichen und verwickelten, uns aber größtentheils unbekannten Ursachen der Erscheinungen in der Natur, welche Ursachen wir, eben wegen unserer Unkenntniß derselben, mit dem Namen des Zufalls bezeichnen, bemerken wir beynahe ohne Ausnahme, daß die Unregelmäßigkeit derselben in dem Maße abzunehmen scheint, wie sie öfter vorkommen, daß also, wie die Erscheinungen selbst sich multipliciren, eine Art von fester Ordnung in ihnen sichtbar wird, die wir denn auch meistens, vielleicht mit Unrecht, einer Art von, uns übrigens verborgener, Absicht zuschreiben. Um dieses sogleich durch ein Beyspiel deutlich zu machen, wollen wir annehmen, daß eine Urne eine uns ganz unbekannte Anzahl von weißen und schwarzen Kugeln enthalte. Wenn man bey jedem Zuge eine derselben herausnimmt und ihre Farbe bemerkt und sie dann wieder in die Urne zurücklegt, um eine neue Ziehung vorzunehmen, so wird bey den ersten Zügen das Verhältniß der gezogenen weißen Kugeln zu den gezogenen schwarzen sehr veränderlich und unregelmäßig seyn, aber je länger man diese Ziehungen fortsetzt, desto deutlicher wird man ein bestimmtes und constantes Verhältniß dieser beyden Farben sich gestalten sehen, und dieses Verhältniß der gezogenen weißen und schwarzen Kugeln wird dem Verhältnisse der in der Urne enthaltenen weißen und schwarzen Kugeln immer näher kommen, je größer die Anzahl der Ziehungen ist, so daß man endlich mit großer Wahrscheinlichkeit das

wahre Verhältniß der Anzahl der in der Urne enthaltenen weißen sowohl, als auch der schwarzen Kugeln wird bestimmen können, wenn uns gleich anfangs dieses Verhältniß völlig unbekannt gewesen ist. Denken wir uns in einem zweyten Beyspiele eine Reihe kreisförmig aufgestellter Urnen, deren jede eine große Anzahl weißer und schwarzer Kugeln enthält. Das ursprüngliche Verhältniß dieser zwey Gattungen von Kugeln kann noch so verschieden seyn, so daß z. B. mehrere Urnen bloß weiße, und wieder andere bloß schwarze Kugeln enthalten. Zieht man dann eine Kugel aus der ersten Urne und wirft sie in die zweyte; schüttelt man dann die Kugeln der zweyten Urne wohl durch einander und zieht aus ihr eine Kugel, und wirft sie in die dritte u. s. w. bis man die aus der letzten Urne gezogene Kugel wieder in die erste wirft und so das Verfahren mit der ganzen Reihe von Urnen öfter wiederholt, so zeigt die Analyse, daß, je öfter man dieses Verfahren wiederholt hat, desto mehr das Verhältniß der weißen und schwarzen Kugeln in jeder Urne sich dem constanten Verhältnisse der weißen und schwarzen Kugeln in allen Urnen nähern wird. Durch diese einfache Art der Transposition der einzelnen gezogenen Kugeln verschwindet also die anfängliche Unregelmäßigkeit dieses Verhältnisses in jeder einzelnen Urne immer mehr und mehr und geht endlich in eine sehr einfache Ordnung über. Stellt man dann zwischen diese Urnen mehrere andere, deren jede wieder eine willkührliche Anzahl von weißen und schwarzen Kugeln enthält, und wendet man jetzt auf alle diese Urnen das oben erwähnte Verfahren an, so wird zwar anfangs die in den alten Urnen bestehende Ordnung gestört werden und eine Unregelmäßigkeit entstehen, die sich über alle Urnen verbreitet, aus welcher sich aber, wenn man nur jenes Verfahren oft genug wiederholt, sich endlich doch wieder jene Regelmäßigkeit entwickeln wird, indem am Ende doch wieder das Verhältniß der weißen Kugeln zu den schwarzen in jeder Urne, sich dem constanten Verhältnisse der weißen zu den schwarzen Kugeln in allen Urnen, den alten und den neuen, immer mehr nähern wird. Ganz dieselbe Erscheinung hat auch bey allen Ereignissen der Natur statt, in welchen gewisse constante Kräfte regelmäßige Wirkungen erzeu-

gen, die eben dadurch andere, veränderliche Einflüsse mit der Zeit überwiegen und so endlich selbst aus dem Schooße der Unordnung und dem scheinbaren Chaos Systeme entwickeln, deren einfache Regelmäßigkeit so oft der Gegenstand unserer Bewunderung ist. Alle Phänomene, selbst diejenigen, welche am meisten von dem blinden Zufalle abzuhängen scheinen, zeigen also, wenn sie nur oft genug wiederholt werden, jene Neigung, sich immer mehr und mehr einem constanten Verhältnisse zu nähern und sich einem bestimmten, meistens sehr einfachen Gesetze zu unterwerfen, aus welchem Gesetze, wenn es uns einmal mit hinlänglicher Genauigkeit bekannt ist, man dann auch die künftigen Erscheinungen dieser Ereignisse bestimmen wird. Die Ursache dieses merkwürdigen Umstandes ist ohne Zweifel darin zu suchen, daß bey den, jene Erscheinungen erzeugenden Veranlassungen eine oder mehrere regelmäßig wirkende sind, welche mit der Zeit die anderen unregelmäßigen, und sich gleichsam, zum Theil wenigstens, einander selbst aufhebenden Ursachen überwiegen und daher auch in regelmäßigen Wirkungen sichtbar werden. Wenn die Ziehung und die Zurückgabe der Kugeln in dem vorhergehenden Beyspiele nicht in der angeführten einfachen Ordnung statt hätte, sondern wenn man z. B. aus der 1., 4., 9...Urne 3, 5, 8..Kugeln in die 3., 4., 7...Urne geben würde, so würde auch jene endliche Ordnung der Verhältnisse der beyden Farben nicht statt haben, aber sie würde, wenn gleich vielleicht später, eintreten, wenn man sowohl in der Zahl der zu ziehenden Kugeln, als auch in der Wahl der Urnen irgend ein anderes Gesetz, z. B. das der figurirten Zahlen eintreten lassen wollte.

Diese sonderbare Erscheinung fällt vielleicht nur wenig auf, weil sie selbst bey alltäglichen Versuchen so oft wiederkömmt und weil sie von dem gesunden Menschenverstande gleichsam schon als ein Axiom angenommen wird. Desto schwerer ist es, einen treffenden Beweis derselben durch die Analyse zu geben. Auch that sich Jacob Bernoulli, der zuerst einen solchen Beweis für diese Erscheinung gefunden hatte, nicht wenig darauf zu Gute. Erst in unsern Tagen hat Laplace eine andere und noch vollständigere Demonstration derselben gefunden, die sich aber hier, wo wir

die Analyse vermeiden wollen, ohne Weitläufigkeit nicht gut mittheilen läßt. Aus diesem Theoreme hat man dann die Folgerung gezogen, die man als ein allgemeines Gesetz ansehen kann: daß nämlich die anfangs meistens veränderlich und ganz zufällig scheinenden Verhältnisse aller Naturereignisse sich immer mehr einem gewissen beständigen Verhältnisse nähern, je zahlreicher diese Erscheinungen selbst sind. So sind, ungeachtet der Veränderungen, welche einzelne Jahre hervorbringen mögen, die Anzahl der Geburten oder der Sterbefälle eines Landes oder einer Stadt für einen bestimmten Zeitraum, wenn man sie aus einer größeren Anzahl von Jahren ableitet, immer sehr nahe constant und dasselbe hat auch mit den Erzeugnissen eines Landes statt, so daß die Vorsicht der Menschen sich von der Unregelmäßigkeit der einzelnen Jahre unabhängig machen kann, wenn sie die Güter der Natur, die sie selbst von Jahr zu Jahr oft sehr ungleich auszutheilen scheint, auf mehrere Jahre zu gleichen Theilen zu verbreiten sich bemüht. Selbst die Erscheinungen in der moralischen Welt scheinen sich diesem allgemeinen Gesetze unterzuordnen. So will man sogar die Erfahrung gemacht haben, daß in Paris und London die Anzahl der, wegen unvollständiger Adressen, auf den Posten zurückgebliebenen Briefe, jährlich immer nahe dieselbe ist.

Es scheint daher, daß bey einer längeren Reihe von Ereignissen derselben Art, die Wirkung der regelmäßigen und constanten Ursachen über die der unregelmäßigen eine Art von Übergewicht erhalten.

Die günstigen und glücklicher Weise noch oft genug wiederkommenden Ereignisse, welche die Beobachtung der ewigen und unveränderlichen Gesetze der Vernunft, der Gerechtigkeit und der Humanität zu begleiten pflegen, zeigen uns, dem Einzelnen so gut als ganzen Völkerschaften, daß es immer vortheilhafter ist, sich diesen Gesetzen unterzuordnen, als sich von ihnen zu entfernen. Unsere Weltgeschichte und unsere eigene Erfahrung unterstützt diese Behauptung. Wer kann die glücklichen Folgen der Vereinigungen läugnen, die auf Vernunft und auf die natürlichen Rechte der Menschheit gegründet sind, oder wer kann die

Vortheile verkennen, die Redlichkeit und Treue dem einzelnen Menschen sowohl, als auch ganzen Staaten bringen. Die Opfer, welche ihnen die gewissenhafte Erfüllung ihrer mit den Nachbarn eingegangenen Verträge kostet, werden reichlich ersetzt durch den Vortheil der Achtung, des Vertrauens und der Wohlfahrt, welche die unmittelbaren Früchte jener edlen Selbstbeherrschung sind. Wie lehrreich, wie interessant könnte unsere Weltgeschichte werden, wenn sie aus diesem Gesichtspuncte behandelt werden möchte.

In den meisten Fällen ist uns die Wahrscheinlichkeit der einzelnen Ereignisse unbekannt, und dann sind wir gezwungen, zu der Vergangenheit zurückzugehen, und in den bereits angestellten Beobachtungen und Erfahrungen eine Anzeige aufzusuchen, die uns in unsern künftigen Erwartungen zu leiten im Stande ist. Gewöhnlich halten wir dann, wie in unsern Spielen, diejenigen Fälle, welche bereits am häufigsten vorgekommen sind, für die wahrscheinlicheren und zwar desto mehr, je öfter sie bereits erschienen sind. So ist, nach unsern Erfahrungen, die Anzahl der Geburten der Knaben zu jener der Mädchen in allen Ländern, wo man bisher solche Untersuchungen anstellen konnte, sehr nahe gleich dem Verhältnisse von 22 zu 21, und dieses Verhältniß scheint von dem Klima und der Lebensart ganz unabhängig zu seyn, so daß man also diese größere Anzahl der männlichen Geburten, so unbekannt uns auch die Ursache derselben seyn mag, als ein Gesetz der Natur betrachten muß.

Wir haben bereits mehrere Beyspiele in dem verwickeltsten Theile der astronomischen Analysis, in der Theorie der gegenseitigen Störungen der Himmelskörper, von dem Nutzen, welche die Wahrscheinlichkeitsrechnung bey diesen Untersuchungen gewähren kann. Die bekannte Acceleration der mittleren Bewegung des Mondes quälte lange die Geometer des verflossenen Jahrhunderts, da sie ihren wahren Grund nicht finden konnten. Lagrange verwarf endlich, nach vielen mühsamen Rechnungen, die Existenz dieser Acceleration gänzlich, indem er sie für eine Täuschung der Beobachter erklärte. Allein Laplace, der die älteren Beobachtungen, besonders die der Araber, mit denen der neuern Zeiten verglich, fand, daß die Existenz einer solchen Acceleration eine

sehr große Wahrscheinlichkeit habe, und indem er, durch diese Überzeugung bewogen, die Theorie des Mondes noch einmal mit der größten Sorgfalt durchging, fand er glücklich den wahren Grund jener scheinbaren Anomalie in der Veränderung der Excentricität unserer Erdbahn.

Oft ist zwar die wahre Auflösung des Problemes, welches das Gesetz dieser Erscheinungen darstellen soll, über die Kräfte unserer Analysis. Aber auch in diesen Fällen ist es interessant und wichtig, jene constanten Verhältnisse und den Grad der Genauigkeit zu kennen, mit welchem sie von den Beobachtungen dargestellt werden. So mag es vielen immerhin noch als eine Hypothese gelten, daß die Ebbe und Fluth des Meeres eine Wirkung der Anziehung des Mondes und der Sonne sey. Aber die große Übereinstimmung, welche die von Laplace auf diese Hypothese gegründete Theorie jener Erscheinung mit so vielen Tausenden von Beobachtungen gewährt, gibt dieser Hypothese einen Grad der Wahrscheinlichkeit, den viele andere unserer menschlichen Kenntnisse noch weit entfernt sind zu besitzen, wenn sie gleich der Art sind, daß es beynahe Niemand wagt, an ihrer Existenz zu zweifeln.

Es ist wahrscheinlich, daß diese Wirkung der Sonne und des Mondes, die so große Bewegungen in den Gewässern des Meeres erzeugt, auch ähnliche Fluctuationen in unserer Atmosphäre hervorbringen werde. Laplace hat zu diesem Zwecke gegen zwölftausend Beobachtungen des Barometers und Thermometers untersucht, die auf der Sternwarte in Paris gemacht worden sind. Aber er fand die hieher gehörenden Veränderungen des Barometers nur gleich drey Hunderttheilchen einer Linie und die Wahrscheinlichkeit dieses Resultates so gering, daß man es noch als sehr ungewiß betrachten muß. Unter dem Äquator, wo jener Einfluß des Mondes und der Sonne am größten ist, würde sich ohne Zweifel diese Untersuchung mit mehr Sicherheit anstellen lassen.

Eine andere Veränderung des Barometerstandes, die von der Änderung der Temperatur bey Tage und bey Nacht entsteht, und die auch in der heißen Zone am merklichsten ist, zeigt, daß

das Barometer, ungeachtet seiner täglichen Schwankungen, gen 9 Uhr des Morgens am höchsten, und gegen 3 Uhr des Abends am tiefsten steht, während es wieder in der Nacht gegen 11 Uhr am höchsten und gegen 4 Uhr des Morgens am niedrigsten steht. Die Differenz des höchsten und niedrigsten Standes beträgt daselbst oft 0.8 einer Par. Linie. In unsern Breiten sind diese Veränderungen viel kleiner, aber auch hier zeigen die Beobachtungen, daß man mehr als 300,000 gegen die Einheit wetten kann, daß diese Erscheinung von irgend einer regelmäßigen Ursache entstehen müsse. Ohne diese Ursache durch die Analyse nachweisen zu können, da es hier hinreichen mag, ihre Existenz außer Zweifel gesetzt zu haben, sieht man doch, schon aus den Epochen dieser Variationen, die sich nach der Länge des Sonnentages richten, daß der Grund dieser Erscheinungen in der Wärme zu suchen ist, welche die Sonne dem Theile der Oberfläche der Erde und ihrer Atmosphäre ertheilt, den sie mit ihren Strahlen bedeckt.

Auch die bekannten täglichen Variationen der Magnetnadel sind eine Wirkung der Sonne auf die Erde, da ihre Perioden ebenfalls von der Länge des Sonnentages abhängen. Ob aber diese Wirkung auf die Magnetnadel ebenfalls durch die Wärme, welche die Sonne erzeugt, oder ob sie durch den Einfluß dieses Gestirns auf die Electricität und den Magnetismus unserer Erde entsteht, werden erst künftige Beobachtungen entscheiden können.

Eine der merkwürdigsten Erscheinungen unseres Planetensystems besteht darin, daß die rotirenden sowohl als auch die fortschreitenden Bewegungen der Planeten um die Sonne und der Satelliten um die Hauptplaneten durchaus in derselben Richtung, von West gen Ost, und überdieß alle sehr nahe in den Ebenen des Sonnenäquators vor sich gehen. Wir bemerken diese Erscheinung bey sechs Hauptplaneten, bey dem Monde der Erde, bey den vier Monden Jupiters und bey einem Monde Saturns, so wie bey dem Ringe dieses letzten Planeten. Es ist daher sehr wahrscheinlich, daß sie keine Wirkung des bloßen Zufalls ist, sondern daß sie in einer allgemeinen Ursache, welche diese gleichförmigen Bewegungen hervorgebracht hat, gesucht werden muß. Auch zeigt die Analyse, daß man über vier Billionen gegen die Einheit wetten kann,

daß dieſe Erſcheinung nicht dem blinden Ohngefähr zugeſchrieben werden kann, und dieſe große Wahrſcheinlichkeit war es, welche Laplace bewog, jene conſtante Urſache dieſes Phänomens aufzuſuchen und uns eine der ſinnreichſten Erklärungen des Urſprungs unſers Sonnenſyſtems zu geben.

Vielleicht werden uns auch fortgeſetzte Erfahrungen bald in den Stand ſetzen, dieſe neue Art der Analyſe auf den Einfluß anzuwenden, welchen mehrere Naturereigniſſe auf unſern eigenen Organismus auszuüben ſcheinen. Die feinſten Inſtrumente, welche wir zu den Beobachtungen der Natur anwenden können, ſind ohne Zweifel unſere Nerven, beſonders wenn ſie durch irgend einen Zufall in einen höhern Stand der Reizbarkeit verſetzt werden. Durch ſie hat man die äußerſt ſchwache Electricität entdeckt, welche durch die Berührung zweyer heterogener Metalle erregt wird, und die ſonderbaren Erſcheinungen, welche eine große Reizbarkeit der Nerven bey einigen Individuen hervorgebracht hat, haben uns den thieriſchen Magnetismus und den Einfluß der Sonne und des Mondes in verſchiedenen Krankheiten kennen gelehrt. Die Wirkungen, welche aus dieſen Quellen entſpringen, ſind ohne Zweifel meiſtens nur ſehr ſchwach, und ſie können daher, von andern Einflüſſen geſtört, leicht verkannt und noch leichter von einer zu lebhaften Phantaſie über ihren wahren Werth geſchätzt werden; aber dieß kann noch kein Grund ſeyn, ſie, wie manche gethan haben, ohne alle weitere Unterſuchung ganz zu verwerfen. Wir ſind noch ſo weit entfernt, alle Agentien der Natur und die verſchiedenen Arten ihrer Wirkſamkeit zu kennen, daß es durchaus nicht gebilligt werden kann, die Exiſtenz ſolcher Erſcheinungen bloß aus dem Grunde zu läugnen, weil ſie uns bey dem gegenwärtigen Zuſtande unſerer Kenntniſſe noch unerklärbar ſind. Vielmehr ſollen wir ſie alle vorurtheilsfrey und parteylos unterſuchen und zwar deſto genauer unterſuchen, je ſchwerer ſie zu erkennen ſind, und eben hier wird es beſonders wünſchenswerth ſeyn, durch unſere Analyſe, wenigſtens einigermaßen, den Grad der Wahrſcheinlichkeit der auf dieſe Erſcheinungen geſtützten Hypotheſen beurtheilen zu können.

Bisher haben wir uns mit der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Erscheinungen in der Körperwelt beschäftiget. Indem wir nun zu jenen der geistigen oder moralischen Welt übergehen, müssen wir zuvörderst bemerken, daß hier die wahren Ursachen der Ereignisse gewöhnlich noch verborgener und ihre Wirkungen noch weit verwickelter sind, als in jener, so daß man, bey dem gegenwärtigen Zustande der Analysis sowohl, als auch unserer bisher gesammelten Kenntnisse, wohl nur selten zu ganz bestimmten Resultaten zu gelangen hoffen darf. So viele unvorhergesehene und unvorherzusehende Ursachen wirken auf die einfachsten Handlungen einzelner Menschen und ganzer Staaten ein, daß es oft selbst dem scharfsinnigsten Beobachter unmöglich wird, sie von einander zu trennen und sich bis zu einer klaren Ansicht des Gegenstandes zu erheben. Auch fehlt es uns, selbst im Großen, an hinlänglichen Erfahrungen. Hätte man z. B. in jedem Zweige der öffentlichen Administrationen seit Jahrhunderten die neu eingeführten Experimente und ihre glücklichen oder unglücklichen Erfolge genau aufgezeichnet, so würde man jetzt über den Nutzen oder Schaden dieser Einrichtungen ein bestimmteres Urtheil fällen können. Aber wie wenige allgemeine und vollkommen bewährte Regeln können selbst über diesen so wichtigen Gegenstand angeführt werden. Es scheint uns klar, daß man dem unabweislichen Fortgang des Ganzen der menschlichen Gesellschaft in materieller und intellectueller Hinsicht kein Hinderniß entgegensetzen soll; aber es ist wohl nicht minder gewiß, daß man jede Veränderung im Großen nur mit der äußersten Umsicht vornehmen darf, wenn man nicht auf neue, und oft ganz unbesiegbare Hindernisse stoßen will. Die Vergangenheit kennen wir bereits durch unsere eigenen Erfahrungen: aber die Übel, welche jede Neuerung mit sich führen wird, sind uns noch unbekannt. In dieser Unkenntniß der künftigen Ereignisse schreibt uns die Vernunft und die Analyse Vorsicht und vor allem die Vermeidung jeder heftigen Veränderung vor, bey welcher, wie bey einem gewaltsamen Stoße, in der physischen sowohl als in der moralischen Welt immer sehr viel von dem verloren geht, was

man in der Mechanik die lebendige Kraft eines Systems zu nennen pflegt.

Einer der wichtigsten Gegenstände dieser Art ist die Wahrscheinlichkeit der Zeugenaussagen, die besonders die Gerichte in einem hohen Grad interessiren muß. Oft zwar ist es uns unmöglich, auf diesem Wege die gesuchte Wahrheit zu erkennen, da die meistens unbekannte Wahrheitsliebe der Zeugen und andere Nebenumstände den Gegenstand sehr verwickelt machen können. Aber in vielen einfachen Fällen läßt sich doch unsere neue Analyse mit einiger Sicherheit anwenden, und immer wird, auch nur eine genäherte Kenntniß einer Sache einer vagen, auf bloßes subjectives Gutdünken und Meinungen gegründeten Ansicht vorzuziehen seyn (VIII).

Auch die Wahlen und Entscheidungen richterlicher Versammlungen unterliegen dieser neuen Analyse. Sie hängen meistens von der Mehrheit der Stimmen, aber auch von der Einsicht und Unparteylichkeit der Votirenden ab, welche letzte einer Berechnung nur schwer zu unterwerfen seyn wird. Doch gibt es auch hier einige allgemeine Gesetze, die schon der gemeine Verstand vorschreibt und die von jener Analyse bestätiget werden. Wenn z. B. die Versammlung nur wenige Kenntniß von dem zu entscheidenden Gegenstande hat; wenn dieser Gegenstand eine ungewöhnlich genaue Untersuchung erfordert; wenn die Wahrheit, der man auf diese Weise den Sieg verschaffen will, mit allgemein angenommenen Vorurtheilen im Gegensatze ist, wie z. B. in frühern Zeiten bey den Hexenprozessen — dann wird dasjenige Resultat, welches man bloß durch die so beliebte Mehrheit der Stimmen zu erhalten sucht, gewöhnlich falsch seyn, und diese Besorgniß wird desto größer seyn, je größer die Anzahl der Mitglieder ist. Es ist daher nothwendig, daß zahlreichen Versammlungen nur solche Entscheidungen überlassen werden, die der größere Theil der Menschen kennt und übersieht; es ist nothwendig, daß Bildung und Kenntniß der uns zunächst umgebenden Gegenstände so allgemein als möglich verbreitet und daß vor allem diejenige Classe der menschlichen Gesellschaft wahrhaft aufgeklärt werde, die bestimmt ist, über das Schicksal der andern zu ent-

ſcheiden oder ſie zu leiten, um nicht von Vorurtheilen, falſchen Anſichten und Unkenntniß der Dinge verführt zu werden. Haben doch ſelbſt die Gebildeten nur zu oft Gelegenheit zu bemerken, daß die erſten Anſichten einer Sache trügen und daß die Wahrheit nicht immer auch zugleich wahrſcheinlich iſt.

Die ſicherſte Art, unter mehreren vorgeſchlagenen Candidaten einen zu wählen, wäre die, wo jeder Wähler die Namen dieſer Candidaten aufſchreibt und ihnen diejenigen Zahlen beyſetzt, welche nach ſeiner Anſicht die Verdienſte der Candidaten zu dieſer Wahl ausdrücken ſollen. Wenn z. B. vier Wähler über drey Candidaten A, B, C folgende Liſten eingeben:

	Erſter Wähler.	Zweyter.	Dritter.	Vierter.
A	10	4	3	3
B	5	7	6	7
C	2	3	2	5

ſo hat der erſte Candidat 20, der zweyte 25 und der dritte 12 Stimmen, alſo der zweyte die meiſten und der dritte die wenigſten Stimmen erhalten, daher der zweyte gewählt wird. Wenn aber die Wähler ihre Liſten ohne Nummern und nur ſo abgeben, daß der zuerſt ſtehende Candidat als der würdigſte, der zweyte als der nächſtwürdige gehalten wird, wenn z. B. jene vier Wähler folgende Liſte eingeben:

Erſter Wähler.	Zweyter.	Dritter.	Vierter.
B	A	C	B
A	B	A	C
C	C	B	A

ſo denkt man ſich von den unterſten Candidaten einer jeden Reihe anzufangen, die natürlichen Zahlen 1, 2, 3 . . beygeſchrieben und verfährt, wie zuvor. In unſerem Schema hat A die Zahlen $2+3+2+1=8$, B aber $3+2+1+3=9$ und C endlich $1+1+3+2=7$, alſo hat B wieder die meiſten und C die wenigſten Stimmen.

Da aber die Intereſſen der einzelnen Wähler und viele andere, dem Verdienſte der Candidaten oft ganz fremde Rückſichten, die Ordnung, welche man durch ſolche Wahleinrichtungen erreichen will, leicht ſtören können, ſo möchte es am gerathenſten ſeyn,

im Allgemeinen bey den Wahlen durch absolute Stimmenmehrheit stehen zu bleiben, die wenigstens alle diejenigen Candidaten, welche die Majorität verschmäht, entfernt halten und die daher meistens den eigentlichen Wunsch der ganzen Gesellschaft ausdrückt.

Diejenigen Gesellschaften, welche sich, ihren Institutionen zu Folge, am Ende einer jeden Periode von mehreren Jahren ganz erneuern sollen, werden sicherer gehen, wenn sie in kleinern Perioden eine theilweise Erneuerung vornehmen. Denn die neuen Wahlen hängen immer von den Meinungen ab, welche eben zu der Zeit dieser Wahlen die vorherrschenden sind, und je öfter daher diese Wahlen theilweise vorgenommen werden, desto mehr wird man sich der allgemeinen Meinung des größten Theils der Gesellschaft annähern.

In solchen Gerichten, wo wichtige und schwere Verurtheilungen ausgesprochen werden, müssen offenbar auch die stärksten Gründe für die Existenz des zu strafenden Verbrechens vorausgesetzt werden. Aber jede bloß moralische Überzeugung ist doch nur eine Wahrscheinlichkeit, keine unwidersprechliche Wahrheit, und wir haben selbst bey den scheinbar gerechtesten Richtern bereits zu viele beklagenswerthe Erscheinungen gesehen, um nicht mit der äußersten Vorsicht zu verfahren, besonders bey Todesstrafen, wo Gutmachung und Ersatz eines erst später erkannten Fehlers unmöglich ist. Wenn aber der Richter bey seinen Urtheilen eine mathematische Gewißheit fordert, so wird er beynahe nie im Stande seyn, ein Urtheil zu fällen, und doch ist diese Fällung durch die Gefahr geboten, der bey der Ungestraftheit des Verbrechens die Gesellschaft ausgesetzt wäre. Man muß sich daher begnügen, wenigstens so starke Beweise des von dem Beklagten begangenen Verbrechens zu haben, daß die Gesellschaft der übrigen Mitbürger weniger zu fürchten hat, wenn der Beklagte unschuldig verurtheilt wird, als wenn er, schuldig freygesprochen, durch seine künftigen Attentate und durch das Beyspiel, das seine Ungestraftheit ähnlichen Verbrechern gibt, den Staat in neue Gefahren setzt. Die Auflösung dieser Aufgabe hängt aber von vielen Nebenumständen ab, die oft schwer zu erkennen seyn werden. Beynahe

immer wird es unmöglich seyn, den Grad der Wahrscheinlichkeit des Verbrechens, der zu einer Verurtheilung nöthig ist, mit Gewißheit anzugeben. Jeder Richter wird, in dieser Beziehung, seinem innern Gefühle folgen müssen, das durch die Kenntniß der Gesetze und der Menschen, durch Umsicht, Scharfsinn und endlich durch viele vorhergegangene Erfahrungen bey ähnlichen Fällen bestimmt und unterstützt wird. Die Auflösung jenes Problemes hängt auch von der Größe der Strafe ab, welche der Verbrecher erleiden soll. Ohne Zweifel werden die Beweise für Todesstrafe eines ganz anderen Gewichts seyn müssen, als die für ein Gefängniß von einem oder einigen Jahren. Die Strafe muß überdieß dem Verbrechen angemessen seyn, und schwere Strafen auf leichte Verbrechen gesetzt, tragen nur dazu bey, viele Schuldige ganz frey zu sprechen. Das Product der Wahrscheinlichkeit, daß das Verbrechen in der That begangen worden ist, in die Größe dieses Verbrechens ist das Maß der Gefahr, welches aus der Freysprechung des Schuldigen für die Gesellschaft entstehen kann.

Welches ist aber die Wahrscheinlichkeit, daß ein solches Urtheil, wenn es durch die Mehrheit der stimmenden Richter ausgesprochen wird, in der That gerecht ist? Die Majorität einer einzigen Stimme in einem zahlreichen Tribunale zeigt an, daß der Gegenstand, um den es sich handelt, noch sehr zweifelhaft und daß daher in diesem Falle die Verurtheilung des Angeklagten den Gesetzen der Humanität, dieser Beschützerinn der Unschuld, entgegen ist. Die Totalität aller Stimmen im Gegentheile gibt eine sehr große Wahrscheinlichkeit, daß die ausgesprochene Sentenz gerecht ist. Aber diese Totalität als nothwendige Bedingung einer schweren Strafe aufzustellen, geht eben so wenig an, da dann ohne Zweifel zu viele Schuldige ungestraft bleiben würden. Man muß daher, um diese beyden Extreme zu vermeiden, entweder die Anzahl der Richter vermindern, wenn man ihre Unanimität als Basis der Verurtheilung aufstellt, oder man muß, bey einer größeren Anzahl von Richtern, auch die Majorität der Stimmen vergrößern, die zu einem Urtheile erfordert werden.

Wenn in einem Tribunal von 101 Richtern 51 der einen,

und 50 der entgegengesetzten Meinung sind, so ist offenbar die Wahrscheinlichkeit, daß die Meinung eines jeden dieser Richter, alle gleich gerecht vorausgesetzt, die wahre sey, nahe gleich $\frac{1}{2}$ d. h. nahe der Wahrscheinlichkeit des Gegentheils gleich, daß nämlich seine Meinung nicht die wahre sey. Sind sie aber alle derselben Meinung, so ist jene Wahrscheinlichkeit jedes einzelnen Richters nahe gleich der Einheit oder der Gewißheit. Außer diesen beyden Extremen kann nur die Größe des Verhältnisses der einen Stimmen über die andern entscheiden, und dieses Verhältniß kann von $\frac{1}{2}$ bis 1 wachsen. Wenn in einem Tribunale von 8 Richtern 5 Stimmen zur Verurtheilung des Angeklagten erfordert werden, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Sentenz ungerecht ist, größer als $\frac{1}{4}$. Sind nur 6 Richter und werden 4 Stimmen erfordert, so ist jene Wahrscheinlichkeit kleiner als $\frac{1}{4}$. Der Angeklagte geht daher bey dieser Reduction der Richterzahl sicherer. In beyden Fällen ist die Majorität der Stimmen um 2 größer, da in dem ersten Falle für die entgegengesetzten Meinungen 5 und 3 und in dem zweyten Falle 4 und 2 Stimmen waren. So lange diese Majorität immer dieselbe bleibt, wird die Wahrscheinlichkeit eines fehlerhaften Urtheils immer größer, je größer die Anzahl der Richter ist, welches auch diese Majorität der Stimmen ist, wenn sie nur immer dieselbe bleibt. So werden in unserm Beyspiele zur Fällung eines Urtheils bey einem Tribunale von bloß zwey Richtern 2 für und keiner gegen die Strafe, also die Totalität der Stimmen erfordert. Im Gegentheile müßten bey einem Tribunale erfordert werden

von 4 Richt.	für die Strafe	u. f. die Losspr.	1 Stim.,	Verhältn.
6 — —	4 — —	2 — —		2
8 — —	5 — —	3 — —		1.67
10 — —	6 — —	4 — —		1.50
50 — —	26 — —	24 — —		1.08
100 — —	51 — —	49 — —		1.04
1000 — —	501 — —	499 — —		1.004

Diese Tafel zeigt, daß sich das Verhältniß der positiven Stimmen zu den negativen, je größer die Anzahl der Richter wird, desto mehr der Gleichheit nähert, bis endlich für ein sehr

zahlreiches Tribunal beyde sehr nahe gleich werden und die Hälfte der Richter für, die Hälfte aber gegen die Strafe ist, wodurch das Resultat ganz unentschieden bleibt. Dasselbe wird der Fall seyn, wenn auch die Majorität der Stimmen statt 2 irgend eine größere Zahl wäre: so daß also die Besorgniß eines unrichtigen Urtheils und daher auch die Unsicherheit des Angeklagten desto größer wird, je größer die Anzahl der Richter ist. Ist diese Majorität z. B. 10, so hat man für ein Tribunal

		Bejahende.	Verneinende.
von 10	Richtern	10 . . .	0
20	„	15 . . .	5
30	„	20 . . .	10
100	„	54 . . .	45
1000	„	505 . . .	495

also wieder diese Annäherung des Verhältnisses zur Einheit zwischen den bejahenden und den verneinenden Stimmen.

Im Gegentheile, wenn man, statt dem arithmetischen, das geometrische Verhältniß für die Majorität festsetzt, so wird die Sicherheit des Urtheils immer desto größer, je größer die Anzahl der Richter ist. Wird z. B. angenommen, daß das Urtheil nur vollzogen werden kann, wenn zwey Drittheile der Richter für die Strafe stimmen, so ist die Wahrscheinlichkeit eines Irrthums bey 6 Richtern nahe $\frac{1}{4}$, und bey zwölf Richtern wird diese Wahrscheinlichkeit beträchtlich kleiner. So hat man unter dieser Voraussetzung bey einem Tribunale

		Bejahende.	Verneinende.
von 5	Richtern	3 . . .	2
10	„	6 . . .	4
20	„	12 . . .	8
50	„	30 . . .	20
100	„	60 . . .	40
1000	„	600 . . .	400 u. s. w.

Überhaupt ist die Wahrscheinlichkeit einer fehlerhaften Sentenz gleich 0.254, wenn 5 Stimmen von 8 zur Verurtheilung hinreichen; aber nur mehr 0.133, wenn 8 Stimmen von 12 hinreichen; sie ist 0.045, wenn 9 Stimmen von 12 erfordert wer-

den, und sie ist endlich nur 0.00012, wenn die Totalität aller zwölf Richter zur Ausführung des Urtheils erfordert wird, wie dieses letzte der Fall bey den englischen Jurys ist; sie ist endlich nahe 0.001, wenn von einem Tribunale von 9 Mitgliedern die Totalität aller Stimmen gefordert wird (IX).

Das geistige Auge des Menschen hat ohne Zweifel eben so seine Illusionen, wie das körperliche; die letzten suchen wir durch das Gefühl, und jene durch Reflexion und Rechnung zu berichtigen. Unsere Leidenschaften und Vorurtheile, unsere herrschenden Meinungen lassen uns die Vortheile mancher Unternehmungen wie in einem Hohlspiegel vergrößert sehen, und setzen uns den gefährlichsten Folgen aus. Gegenwärtige Leiden und die Ursachen, welche sie erzeugen, drücken uns viel mehr, als vielleicht viel größere, aber künftige Übel, die wir uns oft eben durch die Mittel zuziehen, durch welche wir jene zu entfernen suchen. Und nicht nur der Einzelne, auch ganze große Völkerschaften handeln nur zu oft auf dieselbe Weise, indem sie sich der Anarchie und dem Despotismus übergeben, nur um sich von dem lästigen Übel der Gegenwart zu befreyen. Wir haben oben gesehen, wie nachtheilig das Spiel der Lotterie für diejenigen ist, welche sich ihm anvertrauen. Aber es ist sehr zu besorgen, daß selbst viele von denen, welche diese Nachtheile kennen, sich von ihren eitlen Hoffnungen doch nicht abhalten lassen. Die bloße Möglichkeit, mit einer kleinen Summe ein großes Vermögen zu erwerben, so äußerst gering auch die Wahrscheinlichkeit eines glücklichen Erfolges seyn mag, ist so lockend, daß der Arme sein Letztes hinträgt, um wenigstens einige Tage sich in trügerischen Hoffnungen zu wiegen und dann sich der Noth und dem Mangel auszusetzen. Diese Träume, denen er sich überläßt, bedürfen um so weniger einer Widerlegung, da sie sich gegenseitig selbst zerstören. So setzen viele Arme ihr ganzes Vermögen auf eine einzige Zahl, weil diese schon so lange nicht herausgekommen ist, und eben so viele vertrauen ihr Glück einer andern, die schon mehrmal nach einander gezogen worden ist und daher, nach ihrer Meinung, nächstens wieder

gezogen werden muß; aller übrigen Vorurtheile nicht zu gedenken, die mit dem armen, betrogenen Menschen ihr loses Spiel treiben.

Oft führen wir sogar selbst die sonderbaren und unerklärlichen Zufälle herbey, wegen welchen wir dann sehr mit Unrecht das Schicksal anklagen, das uns und unsere Unschuld verfolgen soll. So sucht man in den Spielen, die zum Theil von dem Zufalle, zum Theil aber auch von der Geschicklichkeit des Spielers abhängen, wenn man durch eine längere Zeit verloren hat, seinen Schaden durch gewagte Sätze, die selten ohne Leidenschaft unternommen werden, wieder gut zu machen, wodurch man gewöhnlich nur das Unglück vermehrt und dadurch, weit entfernt, seine eigene Schuld anzuerkennen, in noch heftigere Klagen gegen die Ungunst und die Ungerechtigkeit des Schicksals ausbricht. Welches Recht haben wir denn, von diesem Schicksale ausschließende Gunstbezeigungen auf Kosten der andern zu fordern? Wir lächeln über die Chinesen, die ihr himmlisches Reich für den Mittelpunct der Welt halten, während die meisten von uns, wenn sie es auch nicht immer offen gestehen, doch desto inniger heimlich glauben, daß sie selbst und ihr liebes Ich ein ähnlicher Mittelpunct sind, für welchen die Natur eine ganz besondere Sorgfalt tragen, für welchen das Schicksal ganz besondere Verbindlichkeiten hegen, ja für welchen die Götter selbst von ihren Thronen steigen und ihm zu Liebe den Lauf und die Gesetze des Universums ändern sollen. Und wer von uns nicht thöricht genug ist, in seinen ruhigen und nüchternen Stunden, in den Stunden seiner Zufriedenheit und seines Glückes, solche ausschweifende Forderungen an die höheren Mächte zu machen, wird sich doch, wenn das Unglück ihn ereilt oder bange Besorgniß vor der düstern Zukunft sein Herz beengt, unter den Schutz derselben Anmaßungen zu flüchten suchen, die er früher an andern so tadelnswerth gefunden hatte. Diese Meinungen, von denen sich nur die wenigsten und vielleicht keiner ganz frey zu halten weiß, können oft sehr vortheilhaft, oder doch für ihren Bekenner sehr trostreich seyn, aber sie können eben so oft traurige Folgen haben, und sie sind, wie die Erfahrung und die ganze Menschengeschichte lehrt, den

größten Mißbräuchen ausgesetzt, welche zu allen Zeiten von denjenigen benützt worden sind, denen es darum zu thun war, die andern als Mittel zu ihren eigenen Zwecken zu gebrauchen.

Illusionen jeder Art, so nützlich sie auch zuweilen dem Einzelnen seyn mögen, sind dem Ganzen immer schädlich: die Wahrheit aber allein ist immer und allen nützlich. Aber an welchen Merkmahlen sollen wir sie erkennen? — Wer diese Frage löst, wird der größte Wohlthäter der Menschheit heißen, selbst den betrübenden Fall nicht ausgenommen, daß seine Lösung des Problemes dahin führt, daß uns die reine, nackte Wahrheit ewig verborgen bleiben und daß wir bestimmt sind, sie immer nur, so oft wir uns ihr von Ferne nähern, unter dem trügerischen Gewande der Täuschung zu erblicken. Die wenigen eigentlich mathematischen Wahrheiten ausgenommen, wie viele haben wir noch, von denen, vollkommen überzeugt zu seyn, wir uns rühmen dürfen? Von denen wir dieß glauben, welchen Beweis für die Rechtmäßigkeit dieses Glaubens können wir angeben? — Keinen besseren, als den, daß Tausende mit uns dasselbe glauben. Allein wie viele Dinge sind beynahe allgemein durch mehrere Jahrhunderte, ja durch Jahrtausende geglaubt worden, die demungeachtet falsch waren.

Wir haben daher allen Grund, uns vor den Täuschungen der Einbildungskraft wenigstens so weit, als es uns möglich ist, zu hüten, und überall, so viel wir können, nur den Eingebungen der gesunden und nüchternen Vernunft zu folgen. Zu viele Beyspiele, selbst der ausgezeichnetsten Menschen, rufen uns diese Warnung zu und sogar die Mathematiker, in ihrer Wissenschaft selbst, die doch allen Täuschungen fremd seyn sollte, vermochten nicht immer, diese gefährliche Klippe zu vermeiden. Wenn man die Einheit durch die Größe $1+x$ dividirt, so erhält man bekanntlich die Reihe $1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots$. Nimmt man in dieser Reihe die Größe $x=1$ an, und summirt man je zwey nächste Glieder derselben, so erhält man $\frac{1}{2}=0+0+0+..$ woraus zu folgen scheint, daß eine unendliche Anzahl von Nullen der endlichen Größe $\frac{1}{2}$ gleich ist.

Der bekannte Geometer Guido Grandi stellte im Anfange

des achtzehnten Jahrhunderts diese Behauptung im vollen Ernste auf, und gerieth darüber in einen vieljährigen, heftigen Streit mit Marchetti, der diesen Satz für die Theologie sehr gefährlich hielt, da Grandi daraus die Schöpfung der Welt aus Nichts erklären wollte. Der große Leibnitz, der seiner lebhaften Einbildungskraft zuweilen mehr nachgab, als man es von einem Geiste seiner Art und von einem Mathematiker erwarten sollte, suchte die Sonderbarkeit jener Behauptung zu retten, indem er bemerkte, daß diese Reihe entweder Null oder die Einheit gebe, je nachdem man eine gerade oder eine ungerade Anzahl von den Gliedern derselben summire, und da bey einer unendlichen Anzahl von Gliedern der Unterschied zwischen Gerade und Ungerade verschwinde, so müsse man in diesem Falle, nach den Regeln der Wahrscheinlichkeit, das Mittel jener beyden Resultate 0 und 1, oder mit andern Worten, man müsse die Größe $\frac{1}{2}$ für die wahre Summe dieser unendlichen Reihe annehmen. Ein offenbar falscher Schluß, da die Entwicklung des Bruches $\frac{1+x}{1+x+x^2+\ldots}$ ebenfalls die Reihe $1-x^2+x^3-x^5+x^6-$ und daher, wenn $x=1$ ist, $0+0+0+=\frac{2}{3}$ und nicht $\frac{1}{2}$ gibt, wie die Wahrscheinlichkeitsrechnung nach Leibnitz fordern soll. Die einfache Erklärung dieses Paradoxons ist heute zu Tage zu allgemein bekannt, um hier noch umständlich angeführt zu werden. — Derselbe Leibnitz glaubte in seiner Diatik, in welcher er alle Zahlen durch zwey Ziffer 0 und 1 darstellte, ein getreues Bild der Schöpfung zu erblicken, in welchem er den Schöpfer als die Einheit und das Nichts als das Zero darstellte, und diese Idee gefiel ihm so sehr, daß er sie dem Jesuiten Grimaldi, Präsidenten des mathematischen Tribunals in China, zuschickte, in der Hoffnung, durch dieses Emblem der Schöpfung den Beherrscher und alle Bewohner jenes Landes zu der Annahme des christlichen Glaubens zu bewegen. So weit können Vorurtheile und Illusionen der Einbildungskraft selbst solche Männer verleiten, wenn sie sich den Anlockungen derselben ohne Rückhalt hingeben.

Wir alle sind geneigt zu glauben, daß die Ordnung, welche wir selbst in der Aufeinanderfolge der Erscheinungen der Na-

tur in unsern Tagen bemerken, von jeher bestanden habe und ohne Unterbrechung immer so dauern werde. Ohne Zweifel würde wohl auch der gegenwärtige Zustand der Dinge, wenn er dem vergangenen vollkommen gleich wäre, auf eine eben so unveränderliche Zukunft schließen lassen. Viele Dinge scheinen uns diese Beständigkeit in unserm Sonnensysteme anzudeuten. Selbst die Analyse hat es bereits bestätiget, daß die rotirende sowohl als die progressive Bewegung der Planeten und der Satelliten und die Lagen ihrer Bahnen sowohl als ihre Äquatoren keinen fortgehenden Änderungen, sondern nur periodischen Ungleichheiten unterworfen sind, die, meistens in sehr engen Gränzen eingeschlossen, sich zu verschiedenen Epochen wieder in ihre erste Lage herstellen. Es kann als bewiesen angenommen werden, daß seit den Zeiten Hipparchs d. h. seit nahe 2000 Jahren, die Länge unseres Sterntages nicht um einen Hundertheil einer Secunde und die mittlere Temperatur der Erde nicht um den hundertsten Theil eines Grades Reaum. sich geändert habe. Aber die Ordnung mancher andern Erscheinungen der Natur kann doch noch immer großen Änderungen unterworfen seyn, ohne daß unsere bisherigen Beobachtungen oder unsere Rechnungen sie uns anzuzeigen im Stande sind. Die Wirkungen des Oceans, der Atmosphäre, der Meteore, der Erdbeben und der vulkanischen Ausbrüche äußern ihre immerwährenden Einflüsse auf die Oberfläche der Erde, und diese Einflüsse können vielleicht die Temperatur unserer Klimate, das Volumen unserer Atmosphäre und die Verhältnisse der Luftarten, aus denen sie besteht, allmählig wenigstens, ändern und dadurch endlich für den vegetabilischen und animalischen Theil der Bewohner der Erde einen ganz andern Zustand heraufführen. Die Instrumente und die Beobachtungsmethoden, durch welche wir zur Kenntniß dieser Änderungen gelangen, sind alle noch zu neu, um über diesen Gegenstand einen bestimmten Ausspruch wagen zu können.

Eine längere Reihe von Jahrhunderten wird uns vielleicht in den Stand setzen, diese für alle organischen Wesen sehr wichtigen Ereignisse näher kennen zu lernen. Bereits sind mehrere unbezweifelte Spuren einer früheren, von der gegenwärtigen

sehr verschiedenen Welt aufgefunden worden, und die Eingeweide der Erde, so wie die höchsten Gipfel unserer Berge zeigen uns die Trümmer einer Pflanzen- und Thierwelt, die in den früheren Revolutionen der Erde untergegangen und einer neuen, von jener ganz verschiedenen, Organisation ihre Stelle abgetreten hat. Mit welchem Rechte sollten wir auch diese Unveränderlichkeit ihres Daseyns für unsere Erde erwarten, da wir sie nicht einmal an den Körpern des Himmels erblicken, wo neue Sterne entstehen und ganze große Welten verschwinden, und wo allein schon der Widerstand des Lichts und des Äthers, in welchem sich jene Körper bewegen, in der Folge der Zeit große Änderungen in der Anordnung des Ganzen heraufführen muß.

Besonders hat die den Menschen natürliche und vielleicht seiner intellectuellen Organisation, eigenthümliche Begierde, in die Zukunft zu dringen, zu einer großen Anzahl von oft sehr abenteuerlichen Mitteln geführt, durch welche wir diesem unbeweisbaren Wunsche zu genügen suchen. Die Astrologen, die Zauberer, die Hexen und Traumdeuter liefern uns nur zu viel Beyspiele von den traurigen Verirrungen, denen sich nicht bloß der Einzelne, sondern ganze Völkerschaften, durch mehrere Jahrhunderte ohne Anstand und mit einer Hartnäckigkeit hingegeben haben, die weder die Vernunft, noch selbst tausendmal von dem Gegentheile gemachte Erfahrungen zu besiegen vermochten. Diese Vorurtheile verbittern unser Leben, sie halten uns in beständiger Furcht, sie verfolgen uns selbst bis in unsere Träume — aber alles dieß vermag nichts über das arme Menschengeschlecht, das sich willig allen Qualen Preis gibt, um dadurch seine Lust zu befriedigen, in der dunklen Zukunft zu lesen und das Unmögliche möglich zu machen. Den Grund einer so betrübenden und so allgemeinen Erscheinung müssen wir wohl in der inneren Einrichtung unseres Wesens selbst, in der geistigen Physiologie suchen, die dort anfängt, wo unsere materielle Physiologie aufhört, und die ohne Zweifel, so wie diese, bestimmten Gesetzen unterworfen ist, deren nähere Kenntniß für uns selbst nicht anders als höchst interessant seyn kann. Die Nerven unseres Organismus vereinigen sich in ihren letzten und feinsten Verästungen

beynahe alle in der sogenannten Marksubstanz des Gehirns, und führen daselbst die Eindrücke zusammen, welche sie durch die äußeren Sinne von den Gegenständen erhalten haben. Aber diese Sinne selbst lehren uns nichts, und alle bisher gewagten Versuche des menschlichen Scharfsinnes lassen uns im Dunkeln über die Art, auf welche jene äußeren Eindrücke fortgeführt und dem eigentlichen Denkvermögen mitgetheilt werden. Vielleicht werden die Versuche unserer Nachfolger glücklicher seyn, wenn sie einmal die hiehergehörenden Erscheinungen im Großen aufgefaßt und von den übrigen deutlicher unterschieden haben werden. Eine solche scheint jene geistige Sympathie oder der Trieb zu seyn, sich mit gleichartigen oder gleichgestimmten Wesen in nähere Verbindung zu setzen. Wir bemerken diesen Trieb bey allen organischen und selbst gewissermaßen bey den unorganischen Wesen. Zwey Pendel oder zwey Uhren, deren Gang nur wenig verschieden ist, erhalten endlich, wenn sie auf derselben Unterlage ruhen, einen ganz gleichen Gang. Gespannte Saiten, wenn eine derselben tönt, geben die verwandten Töne wieder. Thiere, verschiedener Gattung, aber von ähnlicher Organisation, streben nach Vereinigung. Viele von ihnen bilden sich von selbst in Gruppen und Heerden und das starke Band der Familienverbindungen scheint sich selbst über viele Geschlechter der Pflanzen zu erstrecken. Die menschlichen Vereinigungen zu größeren Gesellschaften und zu ganzen Staaten haben ohne Zweifel denselben Ursprung. Wie in der Ehe, wie in der Kinderliebe, so sehen wir auch in jenen Gesellschaften, daß der stärkere Geist dasselbe innige Vergnügen in der Leitung und Beschützung des schwächeren findet, welches dieser in der Hingebung und in dem Gehorsam gegen jenen genießt. Verwandte Gefühle und Empfindungen, in einem Kreise mehrerer Menschen erregt, verstärken sich durch gegenseitige Mittheilung, wie wir täglich in unsern Schauspielen sehen. Die Lust, die aus diesen Mittheilungen entspringt, ist oft so mächtig, daß sie zur Begeisterung, ja selbst zum Fanatismus führen kann, der alle Gemüther bis zu einer Art von Wuth erhitzt und indem er sich mit einer unwiderstehlichen Kraft verbreitet, wahrhaft entsetzliche Wirkungen hervorbringt, wie unsere Geschichtbücher

bezeugen. Es ist möglich, daß die oft eben so unbesiegbare Sympathie, die die Muskeln unseres Gesichtes verzieht, wenn wir einen andern lachen oder gähnen sehen, aus derselben Quelle entspringt, die jene Erscheinungen hervorbringt. Unsere Augenlieder schließen sich schnell und unwillkührlich, beynahe noch ehe die Wirkung unsers Willens sie ereilt, vor einer plötzlich auffallenden Gefahr, und wir machen die Bewegung des Ausweichens vor einem uns begegnenden Hinderniſſe, wenn wir gleich noch weit von ihm entfernt sind, ja selbst zuweilen schon bey der bloßen Erzählung einer ähnlichen Begebenheit. Warum ist es manchen Menschen gefährlich, auf einem schmalen Stege oder auf einem Brete zu gehen, das über einen Fluß oder einen Abgrund gelegt ist, während derselbe Mensch keinen Anstand nimmt, es zu betreten, wenn es auf ebenem Boden liegt? Manche andere, wenn sie in einer solchen Lage, oder auf der schmalen Mauer eines hohen Gebäudes stehen, fühlen ein beynahe unwiderstehliches Verlangen, sich von derselben herabzustürzen, obschon sie sich zugleich vor den Folgen eines solchen Sturzes entsetzen.

Die Erzählung großer und edler Thaten erregt nicht nur die Begeisterung, sondern auch den Trieb der Nachahmung, besonders bey jungen Gemüthern, die für alle Eindrücke noch empfänglicher sind. Andere, weniger glücklich organisirte Menschen, werden von Criminal- und Räubergeschichten zu einer ähnlichen Nacheiferung angereizt, und in dieser Beziehung ist die Bekanntmachung solcher Geschichten schon oft schädlich geworden. Hieher gehört auch jene geheimnißvolle Verbindung der äußeren Gegenstände und ihrer inneren Eindrücke, durch welche wir, wenn wir nur einen derselben erfassen, sogleich auch alle übrigen, die mit jenen das erstemal sich gemeinschaftlich dargestellt haben, wieder zurückrufen, und wir haben vielleicht sehr Unrecht, diese Erscheinung bloß dem Gedächtnisse zuzuschreiben.

Der Eindruck, welchen wir nur durch einen einzigen unserer Sinne erhalten, ist gewöhnlich von demjenigen sehr verschieden, der durch die Zusammenwirkung mehrerer Sinne entsteht. Der Staarblinde macht sich gleich nach der Operation gewiß eine

ganz andere Vorstellung von den ihn umgebenden Gegenständen, so lange er sie bloß *sehen* kann, als wenn er später dieselben Eindrücke auch durch den Sinn des Gefühls verdeutlicht und berichtiget hat. Das Bild, welches jene Gegenstände auf der Netzhaut seines Auges entwerfen, bleibt immer dasselbe, aber das *innere* Bild, welches sich die Seele von jenem äußern Bilde des Auges macht, ist durch diese Berichtigung der übrigen Sinne ein anderes geworden. Wir alle haben wahrscheinlich in den ersten Jahren unserer Kindheit die Eindrücke unseres Gesichtes auf eine ähnliche Weise durch das Gefühl berichtigen müssen, und wir sehen später nur, wie uns früher dieses Gefühl zu sehen gelehrt hat. Wo aber dieser letzte Sinn nicht hinreicht, bleiben viele durch ihr ganzes Leben im Dunkeln. So können sich nur wenige überzeugen, daß die Gestirne des Himmels, weil sie sie nicht mit ihren Händen erreichen können, in der That in einer unermeßlichen Entfernung von uns abstehen. Zwey leuchtende Kugeln von gleichem Durchmesser, aber in ungleicher Entfernung von uns, werden uns in der Nacht ungleich groß erscheinen; sobald aber die Sonne über ihnen aufgeht und auch die zwischenliegenden Gegenstände beleuchtet, wird sofort, in unserem Geiste, die nähere verkleinert und die anderen vergrößert, bis beyde, in unserer Schätzung, als nahe gleich große Kugeln erscheinen. So erscheint uns derselbe Mensch in der Entfernung von fünf oder von zehn Klaftern gleich groß, obschon in der That das Bild desselben auf der Retina unseres Auges in dem einen Falle noch einmal so groß ist, als in dem anderen. Aus einem ähnlichen Grunde erscheint uns der Mond in der Nähe des Horizonts, wo so viele Zwischengegenstände ihn von uns trennen, größer, als im Zenithe, obschon er in der That, wie unsere Messungen zeigen, im Zenithe größer ist. Eben so erscheint uns eine Spinne, die sich nahe vor unserem Auge von dem Zweige eines Baumes herabläßt, auf dem ersten Bilde in der Größe eines Vogels, aber wie man die Verbindung derselben mit dem Zweige erkennt, wird auch sofort der erste Eindruck jenes Bildes auf seine wahre Größe reduzirt. Alle diese und ähnliche Phänomene lassen sich weder, wie einige geglaubt haben, durch ihre Zurückführung

auf die Operationen der Urtheilskraft, noch auf die des Gedächtnisses vollständig erklären: sie gehören jener geistigen Physiologie oder jener Psychologie an, von der wir oben gesprochen haben, und deren Gesetze für uns noch größtentheils im Dunkeln liegen.

Eine entfernte Schrift, die wir durchaus nicht lesen können, wird sofort lesbar, wenn ein anderer die Worte derselben ausspricht: das innere Bild, wenn ich so sagen darf, steigt über den äußern Eindruck des Auges herauf, und erleuchtet und berichtiget denselben. Die unverständliche Stimme eines Schauspielers wird vollkommen verständlich, wenn man die Worte liest, die er so eben declamirt, ja oft schon, wenn man durch ein Glas die Gesichtszüge des Sprechenden deutlicher sieht. Aus demselben Grunde erscheinen uns ganz gewöhnliche Gegenstände im Dunkeln oder im Zwielichte unter den seltsamsten Gestalten und der Schrecken, den ihr Anblick erregt, erweitert sie oft bis zum Entsetzlichen. In diesem gereizten Zustande, oder auch bey einer Krankheit dieses innern Sinnes, werden die Eindrücke desselben oft viel lebhafter, als die des äußern Sinnes: denn, hält man diese Erscheinungen der Einbildungskraft für wirkliche Gegenstände, so wird man ein Geisterseher, ein Visionär, der im wachenden Zustande träumt. Diese krankhaften Affectionen irgend eines jener innern Organe liegen ohne Zweifel auch den Mondsüchtigen zu Grunde. Während ihrer Träume ist vielleicht einer ihrer äußern Sinne, z. B. der des Gefühls, nicht völlig eingeschlafen, er ist noch empfänglich für äußere Eindrücke, die, auf seinen innern Sinn fortgeführt, seine Träume modificiren und selbst seine körperlichen Bewegungen im Schlafe leiten.

Oft glauben solche Kranke die Stimmen fremder Personen zu hören oder sie selbst vor sich zu sehen. In den Gegenden an der Nordseite des kaspischen Meeres hat diese Krankheit eine Art von epidemischem Charakter: sie befällt oft ganz gesunde Personen, führt aber meistens, wenn sie länger dauert, zum Tode. Bonnet erzählt von seinem Großvater, einem Greise voll von Gesundheit, daß er solche Erscheinungen in Menge hatte, an denen er sich selbst ergötzte, nachdem er bemerkt hatte, daß sie keinen nachtheiligen Einfluß auf seine Gesundheit äußern. Die

ähnlichen Visionen eines noch lebenden berühmten Staatsministers mit dem grünen Manne sind allgemein bekannt.

Die Geschichte solcher Personen, mit unparteyischer Wahrhaftigkeit erzählt, würde nicht minder interessant seyn und uns eben so wichtige Aufschlüsse über jenen innern Menschen geben, als die Darstellung unseres Lebens im Schlafe und während den Träumen. Gewiß liegt hier noch vieles verborgen, das uns größere Aufklärungen über uns selbst geben könnte, als wir von den unfruchtbaren Feldern erwarten dürfen, auf welchen sich bisher unsere Psychologen und Metaphysiker herumgetrieben haben, Aufklärungen, zu welchen uns vielleicht eine genauere Beobachtung des in unsern Zeiten so viel besprochenen thierischen Magnetismus die Bahn öffnen könnte.

Selbst in denjenigen Operationen jener innern Organisation, die wir ganz dem eigentlichen Gedächtnisse zuzuschreiben pflegen, liegt noch viel Geheimnißvolles, das einer genaueren Untersuchung würdig ist. Wer hat nicht schon die höchst sonderbaren inneren Bewegungen gefühlt, die wir gleichsam unwillkührlich vornehmen, wenn wir uns an einen Namen oder an eine Sache erinnern wollen, die uns nur zum Theil entschwunden ist und deren Benennung, wie man zu sagen pflegt, uns auf der Zunge liegt. Es ist, als ob man das verloren Geglaubte nicht in dem ganzen Kopfe, sondern nur in einem Theile, in einem bestimmten Winkel desselben suchte, etwa wie man eine in einem Kasten verlegte Schrift nur in gewissen Fächern desselben sucht, wo sie, einer gewissen unerklärbaren Ahnung zu Folge, liegen soll. Eindrücke der frühesten Jugend erhalten sich oft bis in das späteste Alter, und sind selbst dann noch lebhaft, wenn die der männlichen Jahre schon längst wieder verschwunden sind. Es scheint, als ob jene ersten Eindrücke, die sich so tief in unser Gedächtniß gegraben haben, nur die Zeit der Reife der späteren abwarten wollten, um dann mit ihrer ganzen jugendlichen Frische wieder hervorzutreten, so wie die Gestirne, wenn das Licht der Sonne für uns erlischt, mit neuem Glanze aus dem Dunkel der Nacht hervorbrechen. Warum behält man die Dinge, die man am Abend eines Tages gehört oder gelernt hat, am sichersten?

Warum vergißt man im Gegentheile jene am leichtesten, die man, etwa aus einem Buche, unmittelbar vor dem Einschlafen erhalten hat? Warum werden verwickelte Untersuchungen, wenn man sie einige Tage ruhen läßt und sich absichtlich ganz von ihnen entfernt, nach dieser Zeit oft so klar und deutlich, als sie durch eine fortgesetzte, angestrengte Untersuchung nie geworden seyn würden? Wir bewundern oft, und mit Recht, das ungewöhnlich starke Gedächtniß einzelner Menschen. Aber wenn man bedenkt, welche Anzahl von Dingen, auch das gewöhnlichste Gedächtniß eines jeden Menschen enthält, so müssen wir erstaunen, wie so viele Gegenstände in einem so kleinen Raume ohne Verwirrung Platz haben können. Einem Sänger auf unsern Bühnen z. B. muß jede Sylbe seiner Rolle, ihr Ton, ihr Zeitmaß und die Geberde, welche sie begleiten soll, klar und lebhaft in seinem Gedächtnisse vorschweben, und die morgige Rolle muß allen diesen unübersehbaren Vorrath in den dunklen Hintergrund zurückstellen, um einem neuen, ähnlichen Heere von Vorstellungen und Erinnerungen ihre Stelle abzutreten. Alle diese endlosen Reihen liegen zu gleicher Zeit in seinem Gedächtnisse, und können, wie die Register einer Orgel, gezogen werden, um je nach dem Bedürfnisse die eine oder die andere in den Vordergrund treten und alle andern übertönen zu lassen.

Diese und unzählige andere Operationen unsers innern Sinnes werden alle durch Wiederholung geläufiger und nachdrücklicher zugleich. Aus dieser reichen Quelle der Psychologie entspringen unsere Gewohnheiten, unsere Gebräuche und selbst unsere Sitten. Aus ihr allein läßt sich erklären, warum, was bey dem einen Volke allgemein als gut, schicklich und der Natur angemessen erscheint, von dem andern als schlecht betrachtet und oft mit Abscheu zurückgestoßen wird. Die Gladiatorenspiele der alten Römer und die Menschenopfer der Wilden erregen Entsetzen auch bey jenen Nationen, die, wegen bloßen Meinungen, Tausende ihrer Brüder mit Lust dem langsamen Tode auf ihren Scheiterhaufen übergeben und sich, jenen gegenüber, für sehr gesittete Menschen halten. Wenn man den bejammernswürdigen Zustand der Sklaven auf den westindischen Zuckerplantagen, oder den der für im-

merwährende Zeiten der Verachtung übergebenen Kaste der Parias, ja wenn man, um nur bey uns selbst stehen zu bleiben, die Zeiten der Leibeigenschaft, oder der Inquisition oder der Kreuzzüge zurückruft, so kann man sich nur mit Mühe enthalten, in die bittersten Thränen und Vorwürfe über ein Geschlecht auszubrechen, das sich vor allen andern Geschöpfen der Erde durch seine Vernunft zu unterscheiden glaubt, und das durch bloße Meinungen, Vorurtheile und Gewohnheiten bis zu solchen entsetzlichen Extremen verleitet werden kann.

Übrigens wird man, bey einiger Aufmerksamkeit auf sich selbst, diejenigen Äußerungen, welche der bloßen Gewohnheit angehören, leicht von denjenigen unterscheiden, welche gleichsam aus der innern und eigenthümlichen Organisation eines jeden Menschen hervorgehen. Wir haben vielleicht sehr unrecht, zu sagen, daß die Thiere allein von der Natur mit Instinct versehen worden sind, da das, was jenem innern Organismus des Menschen angehört, mit Recht denselben Namen erhalten soll. Die Anhänglichkeit der Mutter an ihren Säugling beruht so wenig auf bloßen Vernunftgründen, als die Anhänglichkeit an das andere Geschlecht, wie schon die große Macht beweist, welche diese Triebe, selbst gegen die laute Stimme der Vernunft, auf uns äußert. Ja bloße Ansichten und Meinungen, oft genug wiederholt, graben sich so tief in das Innere des Menschen ein, daß sie, wie mehrere äußere körperliche Dispositionen, von dem Vater auf die Kinder sich vererben und von einer Generation zur andern verpflanzen. Durch bloße Erziehung und Mittheilung wird man diese sonderbaren Phänomene nicht erklären, da sie ganz eigentlich der innern Structur des Menschen und so zu sagen dem Knochensysteme seines geistigen Wesens angehören. Ich habe eine Familie gekannt, in welcher seit mehreren Generationen alle Kinder, wenn sie die Zeit ihrer Pubertät erreichten, Schwärmer bis zum Wahnsinn wurden, während sie vor und nach dieser Periode für die nüchternsten Menschen galten. Drey Töchter einer Mutter, alle unbescholtene und wackere Frauen, die das Glück ihrer Männer machten, hatten von ihrer Mutter die Sonderbarkeit geerbt, während den Zeiten ihrer Hoffnung jede Scheere,

Nadel und andere weibliche Utensilien, die sie bey ihren Freundinnen fanden, sich anzueignen. Sie konnten dem Verlangen nicht widerstehen und alles, was sie über sich vermochten, bestand darin, daß sie diese Dinge in den folgenden Tagen unter der Ausrede der Vergeßlichkeit an ihre frühern Besitzerinnen wieder zurückschickten. Ihre Freundinnen kannten diese Unarten, die anfangs das Gerede der ganzen Stadt waren und die man später bloß zu belächeln sich begnügte, da das durchaus sehr geregelte Betragen dieser Frauen außer jenen Zeiten über allen Verdacht erhaben war.

Nicht weniger merkwürdig ist die Leichtigkeit, mit welcher unsere Organe, wenn sie oft geübt werden, ihre Functionen selbst ohne unsern Willen fortsetzen. Wer im Gehen von einer ihm interessanten Idee ergriffen wird, fängt an zu gesticuliren, ja laut zu sprechen, ohne daß er sich dessen bewußt wäre, und setzt mechanisch seinen Weg fort, ohne es zu wollen. Soldaten, die auf ermüdenden Märschen von dem Schlafe überfallen werden, gehen in demselben Tacte immer weiter und erwachen erst, wenn sie ein Hinderniß aufhält. Die Ärzte haben eine Krankheit bemerkt, in welcher der Mensch, einmal in Bewegung gesetzt, nicht innehalten kann, wenn er sich nicht an einen ihm begegnenden Gegenstand festhält. Überhaupt wird man von den Ärzten besonders wichtige Aufschlüsse über diesen Theil der Physiologie erwarten dürfen, wenn sie einmal ihre fortgesetzte Aufmerksamkeit auf diesen Gegenstand gerichtet haben werden, da die merkwürdigsten Phänomene dieser Art besonders deutlich in krankhaften Zuständen hervortreten.

Diese Erscheinungen der letzten Art zeigen sich allerdings nur bey solchen Operationen, an die wir durch eine öftere Wiederholung schon gewöhnt worden sind. Allein eben diese Gewohnheit ist es, welche über uns, ohne daß wir uns dessen immer deutlich bewußt sind, eine so große Kraft ausübt, und die daher wohl eine nähere Untersuchung verdient. Bey einer unparteyischen Betrachtung unsrer Handlungen und beynahe aller unserer geistigen Functionen, werden wir finden, daß keinesweges, wie wir uns wohl sonst selbstgefällig zu schmeicheln pflegen, Überle-

gung, Vernunftgründe und freye Wahl uns dazu bestimmen, sondern daß die Hauptquellen derselben aus einer Art von Instinct und aus Gewohnheit entspringen. Fast bey jeder unserer Überlegungen geht ein gewisses dunkles, aber sehr mächtig bestimmendes Gefühl vorher, das Menschen von glücklicher, innerer Organisation nur selten trügt; das uns sicherer führt, als alle künstliche Vernunftschlüsse, und das uns gewöhnlich allein zu führen pflegt, da das, was wir Vernunftschlüsse nennen, meistens nur spät nach jenem Gefühle eintritt und mehr dazu dient, jene erste Sensation zu controlliren. Die gütige Natur ließ es bey den Menschen nicht leicht auf die Vernunft allein ankommen, und der Trieb kömmt oft schon über uns, wenn wir mit dem schulgerechten Beweise und mit der eigentlichen Einsicht noch nicht zur Hälfte fertig sind. Das Brauchbarste in unserem Leben haben wir gewöhnlich von Niemand gelernt; es wohnt uns bey, und wir kamen dazu, ohne selbst recht zu wissen, auf welche Art. Am deutlichsten sehen wir dieses in jenen Dingen, in welchen wir eigentlich gar nichts, als eben auf diese Weise, sehen, ich meine, in unsern sogenannten hyperphysischen Wissenschaften. Denn besteht nicht z. B. unsere ganze Metaphysik eigentlich doch nur darin, uns dessen etwas deutlicher, oder wenn man lieber will, etwas gelehrter bewußt zu seyn, was wir alle auch ohne Metaphysik schon längst gewußt haben?

Ein nicht minder kräftiger Hebel, als dieses instinctartige Gefühl, ist aber auch, wie gesagt, die Gewohnheit. Es würde gewiß sehr schlecht um uns stehen, wenn wir alles nur aus Überzeugung thun sollten, und wenn wir zu nichts früh schon gewöhnt würden. Gar vieles und vielleicht das Beste in jedem Menschen ist nur durch eine beständige Gewohnheit von Kindheit an entstanden. Wenn unsere Erzieher, die der jungen so wie der alten Kinder, diese Wahrheit, die sie bisher wohl im Munde geführt, aber demungeachtet noch nicht völlig begriffen haben, ganz einsehen und sie ins praktische Leben einführen werden, so wird die moralische Welt eine ganz andere Gestalt annehmen. Pascal, der diese Macht der Gewohnheit wohl kannte, äußert sich darüber in seinen bekannten Pensées auf folgende

Art: „Wenn sich die Menschen nicht absichtlich verkennen wollen, so müssen sie nur gestehen, daß sie, selbst bey ihren geistigen Functionen, eben sowohl Seele als Körper sind, und daß sich diese beyden Elemente im Leben nicht so leicht trennen lassen, als man gewöhnlich glaubt. Das Ding, was in uns die eigentliche Überzeugung von einer Sache hervorbringt, ist durchaus nicht immer das, was wir den Beweis derselben nennen. Wie wenig Sachen gibt es, die für uns wirklich bewiesen sind?“ — Diese Beweise überzeugen nur den Verstand, aber Instinct und Gewohnheit reißt uns ganz mit sich fort. Die Gewohnheit leitet endlich sogar den Verstand und zieht den Geist nach sich, ohne daß dieser es bemerkt. Wer hat uns bewiesen, daß morgen die Sonne wieder aufgehen wird, oder daß wir alle einmal sterben werden. Und doch, was wird so allgemein, so ohne alle Ausnahme von Jedermann geglaubt, als eben dieses? Erfahrung und Gewohnheit sind es also, die uns überzeugen, und die gar keine Zweifel aufkommen lassen, so wie sie es sind, die den Türken und den Heiden, die den Handwerker und den Soldaten machen. Zu ihnen muß man im praktischen Leben immer wieder zurückkommen, um unsere Geschäfte und Verrichtungen abzukürzen und uns nicht dem Mangel an den eigentlichen Beweisen auszusetzen, die uns so leicht verlassen, wo wir ihrer am dringendsten bedürfen. Wer diese Beweise immer gegenwärtig haben will, macht sich zu viel zu thun und kömmt nie zu Ende. Die Gewohnheit geht sicherer zugleich und schneller: ohne Gewalt, ohne Kunst, ohne Demonstration leitet sie uns zum Ziele, so daß wir durch sie auf eine uns natürliche und gleichsam mechanische Weise alle unsere Geschäfte viel besser verrichten, als wir dieß je durch die bloße Theorie hätten thun können. Es reicht nicht hin, eine Sache bloß aus Gründen und aus Überzeugung anzunehmen; auch unsere Sinne, auch der körperliche Theil unsers Wesens muß zu dieser Annahme bewogen werden: beyde Theile müssen zugleich in Bewegung gesetzt werden, der Verstand durch Gründe, die aber einmal gekannt zu haben für das ganze Leben hinreicht, und die Sinne durch die Gewohnheit, die dann ihre wohlthätigen Wirkungen bis an unsern Tod verbreitet.

Es ist sehr wünschenswerth, daß unsere Philosophen, statt den unfruchtbaren Speculationen, mit welchen sie sich gewöhnlich beschäftigen, diese für den Menschen eben so wichtigen als interessanten Gegenstände weiter verfolgen und genauer untersuchen wollten. Noch haben wir zu wenig Erfahrungen dieser Art gesammelt, um darauf die Theorie jener höhern Physiologie mit Sicherheit gründen zu können. Aber das Feld ist groß, und reich die Ernte für Schnitter, die Muth und Kraft in sich fühlen, das Werk zu beginnen und uns allen ein großes Thor zu neuen Kenntnissen, eine neue Welt zu öffnen, besonders wenn durch ihre Bemühungen ihre Nachfolger, unsere späten Enkel, in den Stand gesetzt werden, auf den gesammelten Vorrath von Erfahrungen und Beobachtungen die Kraft ihrer Analyse anzuwenden, und dadurch erst der neuen Erkenntniß diejenige Sicherheit zu geben, welche wir in allen denjenigen Wissenschaften und nur in denen besitzen, die einer mathematischen Unterlage fähig sind. Die allerdings nicht geringen Schwierigkeiten, dieses jetzt von uns noch so ferne Ziel zu erreichen, werden uns in unsern Bemühungen eben so wenig zurückhalten, als es die vielleicht nicht geringern Hindernisse zu thun vermochten, welche sich der Entdeckung des Gesetzes der allgemeinen Schwere entgegengesetzt haben. Seit dieser großen und für alle Zeiten merkwürdigen Entdeckung hat man gefunden, daß dieses Gesetz nicht nur die Bewegung der himmlischen Körper in dem endlosen Weltenraume genau darstellt, sondern daß es auch, unter zweckgemäßen Modificationen, die Anordnung der kleinsten, die Körper constituirenden Elemente und die regelmäßige Bildung der Krystalle, aus denen sie bestehen, in sich schließt: warum sollte nicht auch jene Bewegung der thierischen Nerven denselben Gesetzen der Dynamik unterliegen, und so gleichsam die dreyfache uns umgebende Welt einen einzigen, gemeinschaftlichen Ursprung haben? Bereits scheinen mehrere Erfahrungen diese Bemerkung zu bestätigen. Die Bewegungen, welche jene Nervenvibrationen dem Muskelsysteme, und durch dasselbe den äußern, fremden Körpern mittheilen, sind alle, wie Entwicklungen elastischer Federn, der Art, daß dabey der gemeinschaftliche Schwerpunct unsers eigenen

und der bewegten fremden Körper, dem bekannten Grundsatz der Mechanik zu Folge, unbeweglich bleibt. Auch jene Vibrationen scheinen sich, ohne Störung oder Verwirrung, eine über die andere zu verbreiten, wie wir dieses bey den Wellen unserer Gewässer und selbst unserer Atmosphäre bemerken. Diese Vibrationen theilen sich den Umstehenden mit, wie sich die Schwingungen eines tönenden Körpers den sie umgebenden Gegenständen mittheilen. Wie es aber auch mit diesen jetzt noch im tiefen Dunkel liegenden Gegenständen und mit ihrer Beleuchtung in einer wahrscheinlich noch sehr fernen Zukunft sich verhalten mag, uns genüge es, diese Zukunft wenigstens geahndet, und uns der Wahrheit, die uns vielleicht immer versagt ist, so viel es unsere schwachen Kräfte vermochten, genähert zu haben.

Anmerkungen.

I. Absolute Wahrscheinlichkeit.

Wenn es unter einer Anzahl von N gleich möglichen Fällen n Fälle, die irgend einem Ereigniſſe günſtig, alſo auch $n' = N - n$ dieſem Ereigniſſe nicht günſtige Fälle gibt, ſo iſt, nach dem oben angeführten Grundſatze, die Wahrſcheinlichkeit w, daß ein günſtiger Fall eintrete,

$$w = \frac{n}{N}$$

und eben ſo die Wahrſcheinlichkeit w', daß ein ungünſtiger eintrete,

$$w' = \frac{n'}{N'}$$

und die Summe beyder Wahrſcheinlichkeiten $w + w' = 1$ iſt gleich der Einheit d. h. der Gewißheit, daß entweder ein günſtiger oder ein ungünſtiger Fall eintreten wird.

Ex. I. Von drey Urnen A, B, C enthält eine nur ſchwarze und die beyden andern nur weiße Kugeln. Welches iſt die Wahrſcheinlichkeit w, daß man, wenn man auf Gerathewohl aus einer dieſer drey Urnen eine Kugel nimmt, eine ſchwarze Kugel ziehen wird?

Wenn man nicht weiß, welche dieſer drey Urnen die ſchwarzen Kugeln enthält, ſo gibt es hier drey gleich mögliche Fälle, von denen aber nur einer ein günſtiger iſt; alſo iſt $w = \frac{1}{3}$. Wenn man aber z. B. weiß, daß die Urne A nur weiße Kugeln enthält, ſo wird man die Hand gewiß nur an eine von den beyden andern legen; der möglichen Fälle werden alſo nur mehr zwey ſeyn, von denen einer ein günſtiger

ist; also wird auch die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen, $w = \frac{1}{2}$ seyn. In jenem Falle wird man also 1 gegen 3, in diesem aber 1 gegen 2 wetten können, daß eine schwarze Kugel gezogen wird. Weiß man endlich, daß beyde Urnen A und B nur weiße Kugeln enthalten, so wird man die Hand nur an die dritte Urne C legen, und da hier gewiß eine schwarze Kugel gezogen wird, so wird auch die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses gleich der Einheit seyn. In der That ist in dem letzten Falle nur ein günstiger und auch nur ein möglicher Fall, also die Wahrscheinlichkeit gleich der Einheit oder gleich der Gewißheit.

Ex. II. Man habe zwey sechsseitige Würfel A und B, wo jede der Seiten nach der Reihe mit 1, 2.. bis 6 bezeichnet ist.

Die Wahrscheinlichkeit, daß man auf einen Wurf mit dem einen Würfel A die Zahl 2 und mit dem andern B die Zahl 5 wirft, ist gleich $\frac{1}{36}$ und eben so jede für zwey andere Zahlen, weil überhaupt, wie die folgende Tafel zeigt, 36 gleich mögliche Fälle und unter diesen nur ein günstiger ist.

A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1
1	2	2	2	3	2	4	2	5	2	6	2
1	3	2	3	3	3	4	3	5	3	6	3
1	4	2	4	3	4	4	4	5	4	6	4
1	5	2	5	3	5	4	5	5	5	6	5
1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6	6

Eben so ist die Wahrscheinlichkeit, daß man überhaupt, ohne Rücksicht auf die einzelnen Würfel, mit einem Wurfe beyder Würfel die Zahl 2 und 5 werfe, gleich $\frac{2}{36}$, aber die Wahrscheinlichkeit, daß man zwey gleiche Zahlen 1, 1 oder 2, 2 .. werfe, ist nur $\frac{1}{36}$.

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Summe der auf einen Wurf geworfenen Zahlen gleich 7 sey, ist $\frac{6}{36}$; die Wahrscheinlichkeit, daß sie gleich 5 sey, ist gleich $\frac{4}{36}$, daß sie gleich 4 sey, gleich $\frac{3}{36}$ u. s. w.

II. Relative Wahrscheinlichkeit.

Ist $N = n + n'$ die Anzahl aller möglichen Fälle, und unter ihnen n die Anzahl einer Art und n' die einer andern Art, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fall der ersten Art eintrete, wenn nur diese beyden Arten berücksichtiget werden, gleich

$$\frac{n}{n+n'}$$

und die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fall der zweyten Art eintrete, ist gleich

$$\frac{n'}{n+n'}$$

Nennt man wieder $w = \frac{n}{N}$ und $w' = \frac{n'}{N}$ die absoluten Wahrscheinlichkeiten, so ist

$$\frac{n}{n+n'} = \frac{w}{w+w'} \text{ und } \frac{n'}{n+n'} = \frac{w'}{w+w'}$$

oder die relative Wahrscheinlichkeit eines Falles ist gleich der absoluten Wahrscheinlichkeit desselben Falles, dividirt durch die Anzahl der absoluten Wahrscheinlichkeiten.

Ex. I. Zwey Personen spielen mit zwey Würfeln unter der Bedingung, daß, indem alle übrigen Fälle unbeachtet bleiben, der Erste gewinnen soll, wenn er mit einem Wurfe 7, und der Andere, wenn er 4 wirft, so ist (nach I.) die absolute Wahrscheinlichkeit, daß der Erste gewinne, $w = \frac{6}{36}$ und die des Zweyten $w' = \frac{3}{36}$; also ist die relative Wahrscheinlichkeit, daß der Erste gewinne, $\frac{w}{w+w'} = \frac{6}{9}$ und die, daß der Zweyte gewinne, $\frac{w'}{w+w'} = \frac{3}{9}$ oder ihre Wahrscheinlichkeit zu gewinnen verhalte sich wie 6 : 3 oder wie 2 : 1.

Ex. II. Eine Urne enthält m weiße, n rothe, p blaue, q grüne Kugeln u. s. f., und es sey $m + n + p + q \ldots = T$.

Die absolute Wahrscheinlichkeit, daß man auf den ersten Zug eine weiße ziehen wird, ist $\frac{m}{T}$ und eben so für eine rothe $\frac{n}{T}$ u. s. w.

Aber die relative Wahrscheinlichkeit, daß man eher eine weiße, als eine rothe ziehen wird, ist gleich

$$\frac{\frac{m}{T}}{\frac{m}{T}+\frac{n}{T}}=\frac{m}{m+n}$$

also auch die Wahrscheinlichkeit, daß man eher eine rothe als eine weiße ziehen wird, gleich

$$\frac{\frac{n}{T}}{\frac{m}{T}+\frac{n}{T}}=\frac{n}{m+n}$$

und die Summe beyder Wahrscheinlichkeiten ist wieder gleich der Einheit.

III. Wahrscheinlichkeit für mehrere Arten von günstigen Fällen.

Von N möglichen Fällen seyen n für einen, n′ für einen zweyten, n″ für einen dritten Fall u. s. f. günstig, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß irgend einer dieser günstigen Fälle eintrete, gleich

$$\frac{n+n'+n''+}{N}$$

oder gleich $w+w'+w''+$

wenn wieder $w=\frac{n}{N}$, $w'=\frac{n'}{N'}$, $w''=\frac{n'''}{N}\ldots$ die absoluten Wahrscheinlichkeiten dieser Fälle sind.

Ex. Die absolute Wahrscheinlichkeit, mit zwey Würfeln 7 zu werfen, war gleich $\frac{6}{36}$, und die absolute Wahrscheinlichkeit, 8 zu werfen, ist $\frac{5}{36}$. Also ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Wurfe entweder 7 oder 8 zu werfen, gleich

$$\frac{6}{36}+\frac{5}{36}=\frac{11}{36}=0.305.$$

Die absolute Wahrscheinlichkeit, 9 zu werfen, ist $\frac{4}{36}$, also ist die Wahrscheinlichkeit, auf einen Wurf entweder 7 oder 8 oder 9 zu werfen, gleich

$$\frac{6+5+4}{36}=\frac{15}{36}=0.417.$$

IV. Wahrscheinlichkeit des wiederholten Eintreffens eines günstigen Falles.

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ereigniß, dessen absolute Wahrscheinlichkeit gleich $w = \frac{n}{N}$ ist, m mal nach einander eintrete, ist gleich

$$\left(\frac{n}{N}\right)^m \text{ oder gleich } w^m.$$

Ex. Mit einem Würfel die Zahl 1 zu werfen, ist die absolute Wahrscheinlichkeit gleich $\frac{1}{6}$. Also ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel zweymal nach einander die Zahl 1 zu werfen, gleich $\frac{1}{6^2}$ und dreymal, gleich $\frac{1}{6^3}$ u. s. f.

Die absolute Wahrscheinlichkeit, mit zwey Würfeln auf einen Wurf die Zahlen 1 und 1 zu werfen, ist $\frac{1}{36}$, also ist die Wahrscheinlichkeit, mit ihnen zweymal nach einander die Zahlen 1 und 1 zu werfen, gleich $\frac{1}{36^2} = 0.0008$.

Die absolute Wahrscheinlichkeit, mit zwey Würfeln auf einen Wurf zwey gleiche Zahlen überhaupt zu werfen, ist $\frac{6}{36}$. Also ist die Wahrscheinlichkeit, daß dieser Fall viermal hinter einander eintreffe, gleich

$$\left(\frac{6}{36}\right)^4 = \frac{1}{1296} = 0.0008.$$

V. Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens mehrerer Ereignisse.

Von N Fällen einer Art seyen n günstige; von N′ Fällen einer andern Art n′ günstige u. s. w.; also die absolute Wahrscheinlichkeit dieser Fälle

$$w = \frac{n}{N} \qquad w' = \frac{n'}{N'} \qquad w'' = \frac{n''}{N''} \text{ u. s. w.}$$

Dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß von diesen günstigen Fällen mehrere zugleich eintreffen,

für zwey Fälle $\frac{n}{N} \cdot \frac{n'}{N'} = w \cdot w'$,

für drey Fälle $\frac{n}{N} \cdot \frac{n'}{N'} \cdot \frac{n''}{N''} = w \cdot w' \cdot w''$ u. s. f.

Ex. I. Die absolute Wahrscheinlichkeit, daß mit zwey Würfeln 8 geworfen werde, war $\frac{5}{36}$ und die, daß 9 geworfen werde, ist $\frac{4}{36}$, also ist die Wahrscheinlichkeit, daß mit zwey Würfeln in zwey Würfen 8 und 9 geworfen werden, gleich

$$\frac{5}{36} \cdot \frac{4}{36} = \frac{5}{324} = 0.0154.$$

Ex. II. Wenn A und B jeder zwey und C nur einen Würfel wirft, so ist die absolute Wahrscheinlichkeit, daß A zwey gleiche Zahlen werfe, gleich $\frac{6}{36}$; die Wahrscheinlichkeit, daß B keine gleichen Zahlen werfe, gleich $\frac{30}{36}$ und die Wahrscheinlichkeit, daß C die Zahl 6 werfe, gleich $\frac{1}{6}$. Also ist auch die Wahrscheinlichkeit, daß alle drey Fälle zugleich eintreffen, gleich

$$\frac{6}{36} \cdot \frac{30}{36} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{216} = 0.0231.$$

Ex. III. Wenn ein Spiel von 32 Karten in vier Theile, nach den vier Farben getheilt wird, so daß jeder Theil nur eine Farbe enthält: welches ist die Wahrscheinlichkeit, daß man auf den ersten Zug eine Figur von gegebener Farbe ziehe?

Die absolute Wahrscheinlichkeit, daß man die Hand auf das rechte von den vier Packeten lege, ist $\frac{1}{4}$. Da aber dieses Packet 8 Karten enthält, von welchen nur 3 günstig sind, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß man aus diesem Packete die wahre Karte ziehe, gleich $\frac{3}{8}$, also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8}$, oder gleich $\frac{3}{32} = 0.094$. Da nämlich nur eines der 4 Packete die wahre Karte enthält und da von den 8 Karten jedes Packets nur 3 günstige sind, so muß man die $\frac{3}{8}$ nur von dem vierten Theile aller Karten nehmen.

Ex. IV. Eine Urne enthält 2 weiße und 1 schwarze Kugel. Eine

andere enthalte 4 weiße und 1 schwarze. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, daß man auf den ersten Zug aus einer dieser Urnen eine weiße Kugel ziehen wird?

Die absolute Wahrscheinlichkeit, daß man die Hand an die erste Urne legen wird, ist $\frac{1}{2}$, und die Wahrscheinlichkeit, daß dann eine weiße Kugel gezogen wird, ist $\frac{2}{3}$, also ist die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens beyder Fälle gleich $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Ganz eben so hat man bey der zweyten Urne für die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens beyder Fälle $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$. Da aber diese zwey Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{5}$, beyde für dasselbe günstige Ereigniß gehören, so hat man (nach III) für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15} = 0.733.$$

Ex. V. Das vorhergehende Beyspiel allgemeiner zu machen, habe man

a Urnen, deren jede m weiße und n schwarze Kugeln hat, und a′ Urnen, deren jede m′ weiße und n′ schwarze Kugeln hat, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß man auf den ersten Zug eine weiße Kugel ziehen wird, gleich

$$\frac{a}{a + a'} \cdot \frac{m}{m + n} + \frac{a'}{a + a'} \cdot \frac{m'}{m' + n}.$$

Ex. VI. Hat man m Fälle, die dem Ereignisse A günstig sind und n Fälle, die dem Ereignisse B günstig sind, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß zwey Versuche nach einander

A und A geben, gleich . . . $\frac{m^2}{(m + n)^2}$

A und B » » . . . $\frac{m\,n}{(m + n)^2}$

B und A » » . . . $\frac{n\,m}{(m + n)^2}$

B und B » » . . . $\frac{n^2}{(m + n)^2}$

Sieht man also nicht auf die Ordnung, in welcher diese Ereignisse einander folgen, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß man z. B. mit einem Würfel in zwey Würfen

A und A geben, gleich . . . $\frac{m^2}{(m+n)^2}$

A . B oder B . A . . . . . $\frac{2mn}{(m+n)^2}$

B und B . . . . . $\frac{n^2}{(m+n)^2}$

Eben so ist die Wahrscheinlichkeit, daß, ohne auf die Ordnung der Seiten A, B zu sehen, drey Würfe

3^{mal} A geben gleich . . . . $\frac{m^3}{(m+n)^3}$

2^{mal} A und 1^{mal} B . . . $\frac{3m^2n}{(m+n)^3}$

1^{mal} A und 2^{mal} B . . . $\frac{3mn^2}{(m+n)^3}$

3^{mal} B . . . . . $\frac{n^3}{(m+n)^3}$.

Man bemerkt hier sogleich die Ähnlichkeit dieser Ausdrücke mit denen des Binomiums. Es sey daher, um dieß fortzusetzen, der Kürze wegen $f = \frac{m+n}{m}$ und $g = \frac{m+n}{n}$, und die Reihe gegeben

$$f^p + p \cdot f^{p-1} g + \frac{p \cdot p-1}{1.2} \cdot f^{p-2} g^2 + \frac{p \cdot p-1 \cdot p-2}{1.2.3} \cdot f^{p-3} g^3 + \ldots$$

so ist das erste Glied dieser Reihe die Wahrscheinlichkeit, daß man mit p Würfen p^{mal} die Zahl A treffe; das zweyte Glied drückt die Wahrscheinlichkeit aus, mit p Würfen $(p-1)^{mal}$ A und 1^{mal} B zu treffen; das dritte Glied aber gibt die Wahrscheinlichkeit, mit p Würfen $(p-2)^{mal}$ A und 2^{mal} B zu treffen u. s. w.

Ex. VII. Welches ist aber die Wahrscheinlichkeit, daß man in p Würfen wenigstens nicht weniger als $(p-1)^{mal}$ A treffe?

Da in dem gesuchten Ereignisse auch das enthalten ist, wo man in p Würfen p^{mal} A trifft, so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich der Summe der zwey ersten Glieder jener Reihe, also gleich

$$f^p + p \cdot f^{p-1} g$$

und eben so ist die Wahrscheinlichkeit, daß man in p Würfen nicht weniger als $(p-2)^{mal}$ A und nicht weniger als 2^{mal} B treffe, gleich der Summe der drey ersten Glieder jener Reihe u. s. f.

Ex. VIII. Um darauf einige besondere Fälle anzuwenden, suchen wir die Wahrscheinlichkeit, mit einem 6seitigen Würfel in 4 Würfen die Zahl 6 wenigstens 2^{mal} zu werfen.

Hier ist $m = 1$, $n = 5$ und $p = 4$, also die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich der Summe der drey ersten Glieder jener Reihe, oder gleich

$$\left(\frac{1}{6}\right)^4 + 4\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{5}{6} + \frac{4 \cdot 3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{171}{1296}$$ oder

nahe gleich $\frac{1}{7}$.

Suchen wir noch die Wahrscheinlichkeit, mit 4 Würfen die Zahl 6 wenigstens einmal zu werfen, so ist m, n und p, wie zuvor, und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist die Summe der vier ersten Glieder jener Reihe, oder gleich

$$\frac{171}{1296} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{671}{1296}$$

und da diese Zahl $\frac{671}{1296}$ etwas größer als $\frac{1}{2}$ ist, so ist es auch wahrscheinlicher, daß die Zahl 6 in 4 Würfen einmal, als daß sie gar nicht vorkommen wird.

VI. Wahrscheinlichkeiten für wechselseitige Ereignisse.

Für N mögliche Fälle sey $w = \frac{n}{N}$ die absolute Wahrscheinlichkeit eines, und $w' = \frac{n'}{N}$ die eines andern Ereignisses, so ist also w die Wahrscheinlichkeit, daß das I^te^ Ereigniß eintreffe, und $1 - w$ die Wahrscheinlichkeit, daß das I^te^ Ereigniß nicht eintreffe.

Eben so ist (nach V)

$w w'$ die Wahrscheinlichkeit, daß beyde Ereignisse I und II zugleich eintreffen, und $(1 - w) w'$ die Wahrscheinlichkeit, daß I nicht, aber wohl II eintreffe; $(1 - w') w$ die Wahrscheinlichkeit, daß I, aber nicht II eintreffe, und $1 - (1 - w)(1 - w') = w + w - w w'$ die Wahrscheinlichkeit, daß I oder daß, wenn I nicht, wenigstens II, daß also von beyden wenigstens eines eintreffe.

Ex. Die Wahrscheinlichkeit, mit zwey Würfeln auf den ersten Wurf 9, oder wenn dieß nicht geschieht, wenigstens auf den zweyten Wurf 9 zu treffen, ist gleich

$$1 - \left(1 - \frac{4}{36}\right)\left(1 - \frac{4}{36}\right) = 0.2099.$$

Die Wahrscheinlichkeit aber, auf den ersten Wurf 9, oder wenn dieß nicht geschieht, auf den zweyten Wurf 8 zu treffen, ist gleich

$$1 - \left(1 - \frac{4}{36}\right)\left(1 - \frac{5}{36}\right) = 0.2345.$$

Eben so hat man, wenn noch ein drittes Ereigniß, dessen absolute Wahrscheinlichkeit $w'' = \frac{n''}{N}$ ist, hinzukömmt, für die Wahrscheinlichkeit, daß I, oder wenn dieß nicht geschieht, daß II, oder wenn auch dieses nicht geschieht, daß dann wenigstens III eintreffe, den Ausdruck $1 - (1 - w)(1 - w')(1 - w'')$ u. s. f.

Ex. Die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln im ersten Wurfe die Zahl 7, oder, wenn dieß nicht geschieht, im zweyten die Zahl 7, oder wenn auch dieses nicht geschieht, wenigstens in dem dritten Wurfe die Zahl 7 zu werfen, ist gleich

$$1 - \left(1 - \frac{6}{36}\right)\left(1 - \frac{6}{36}\right)\left(1 - \frac{6}{36}\right) = 1 - \left(\frac{30}{36}\right)^3 = 0.421.$$

Sucht man dieselbe Wahrscheinlichkeit für die Zahl 2, so ist sie gleich $1 - \left(1 - \frac{1}{36}\right)^3 = 0.081$, also viel kleiner.

Diese Ausdrücke lassen sich unmittelbar auf die wahrscheinliche Dauer der Verbindungen zweyer oder mehrerer Personen in Witwen- und Waisenanstalten anwenden. Ist nämlich w die Wahrscheinlichkeit, daß eine a jährige Person A noch p Jahre leben wird und ist eben so w' die Wahrscheinlichkeit, daß eine b jährige Person B noch p Jahre, und w'', daß eine c jährige Person C noch p Jahre leben wird u. s. w., welche Wahrscheinlichkeiten man aus den bekannten Mortalitätstafeln findet, so ist ww' die Wahrscheinlichkeit, daß A und B noch p Jahre beysammen leben oder die Ehedauer. Eben so ist $1 - ww'$ die Wahrscheinlichkeit, daß von diesen beyden Personen nach p Jahren eine schon todt ist; $w(1 - w')$ die Wahrscheinlichkeit, daß nach p Jahren A noch lebe und B schon todt ist; $w'(1 - w)$ die Wahrscheinlichkeit, daß nach p Jahren A schon todt ist und B noch lebe; $(1 - w)(1 - w')$ die Wahrscheinlichkeit, daß nach p Jahren beyde schon todt sind und $1 - (1 - w)(1 - w')$ die Wahrscheinlichkeit, daß nach p Jahren noch nicht beyde todt sind, sondern daß wenigstens einer, oder vielleicht beyde noch leben.

Eben so ist $ww'w''$ die Wahrscheinlichkeit, daß nach p Jahren alle drey Personen A, B, C noch beysammen leben; $ww'(1 - w'')$ die Wahrscheinlichkeit, daß nach p Jahren A und B noch leben, aber C

schon todt ist; $(1-w)(1-w')w''$ die Wahrscheinlichkeit, daß nach p Jahren A und B schon todt sind, aber C noch lebe; $1-ww'w''$ die Wahrscheinlichkeit, daß nach p Jahren wenigstens eine von diesen drey Personen todt ist; $1-(1-w)(1-w')(1-w'')$ die Wahrscheinlichkeit, daß nach p Jahren noch nicht alle drey todt sind, sondern daß wenigstens eine, vielleicht zwey, vielleicht alle drey noch leben; $(1-w)(1-w')(1-w'')$ die Wahrscheinlichkeit, daß nach p Jahren alle drey schon todt sind u. s. w.

VII. Lotterien.

A. Eine Lotterie enthalte n Nummern, von welchen bey jeder Ziehung r Nummern gezogen werden. Man hat a Nummern gesetzt. Welches ist die Wahrscheinlichkeit w, daß diese a Nummern alle herauskommen?

$$\text{Es ist } w = \frac{r\,(r-1)\,(r-2)\,\ldots\,(r-a+1)}{n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-a+1)}$$

In unsern gewöhnlichen Lotterien ist $n = 90$ und $r = 5$ also

$$w = \frac{5\,.\,4\,.\,3\,\ldots\,(6-a)}{90\,.\,89\,.\,88\,\ldots\,(91-a)}$$

1. Hat man also nur eine Nummer gesetzt, so ist $a = 1$ und die Wahrscheinlichkeit, daß sie heraus komme

$$w = \frac{1}{18} = 0.0555.$$

2. Für zwey Nummern ist $a = 2$ und daher die Wahrscheinlichkeit, mit zwey gesetzten Nummern eine Ambe zu erhalten

$$w = \frac{5\,.\,4}{90\,.\,89} = \frac{2}{801} = 0.002497.$$

Eben so ist die Wahrscheinlichkeit, mit drey Nummern eine Terne zu erhalten

$$w = \frac{5\,.\,4\,.\,3}{90\,.\,89\,.\,88} = \frac{1}{11748} = 0.000\;\;085$$

und mit vier Nummern eine Quaterne

$$w = \frac{5\,.\,4\,.\,3\,.\,2}{90\,.\,89\,.\,88\,.\,87} = \frac{1}{511038} = 0.000\;\;001\;\;957$$

und endlich mit fünf gesetzten Nummern eine Quinterne

$$w = \frac{5 . 4 . 3 . 2 . 1}{90 . 89 . 88 . 87 . 86} = \frac{1}{43949268} = 0.000\ \ 000\ \ 023$$

B. Die Wahrscheinlichkeit, daß a gesetzte Nummern alle und überdieß noch in einer bestimmten Ordnung herauskommen, ist

$$w = \frac{r\,(r-1)\,(r-2)\ldots(r-a+1)}{1 . 2 . 3 \ldots a . n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-a+1)}$$

C. Setzt man endlich $a = r$, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß die sämmtlichen r Nummern, welche in einer Ziehung gezogen werden, voraus bestimmte Nummern sind (nach A)

$$w = \frac{1 . 2 . 3 \ldots r}{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-r+1)}$$

und daß sie überdieß noch nach einer bestimmten Ordnung herauskommen (nach B)

$$w = \frac{1}{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-r+1)}$$

D. Eine Lotterie bestehe wieder aus n Nummern, von welchen bey jeder Ziehung r gezogen werden. Welches ist die Wahrscheinlichkeit w, daß von a gesetzten Nummern eine bestimmte Anzahl, z. B. b Nummern herauskomme?

$$\text{Sey } A = \frac{(n-a)\,(n-a-1)\,(n-a-2)\ldots(n-a-[r-b-1])}{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-r+1)}$$

$$B = a\,(a-1)\,(a-2)\ldots(a-b+1)$$
$$C = r\,(r-1)\,(r-2)\ldots(r-b+1)$$

so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$w = \frac{A . B . C}{1 . 2 . 3 \ldots b}.$$

Ex. 1. Man hat zwey Nummern gesetzt. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, daß von ihnen gewiß eine herauskömmt? Ist wie zuvor $n = 90$ und $r = 5$, so ist für dieses Beyspiel $a = 2$ und $b = 1$, also $A = \frac{85}{90 . 89}$, $B = 2$ und $C = 5$, also

$$w = \frac{85}{801} = 0 . 10611$$

Ex. 2. Hat man drey Nummern gesetzt, so ist $a = 3$ und die

Wahrscheinlichkeit, daß von ihnen eine herauskömmt, gibt

$$b = 1,\ A = \frac{85 \cdot 84}{90 \cdot 89 \cdot 88},\ B = 3,\ C = 5$$

$$\text{also } w = \frac{85 \cdot 84}{6 \cdot 89 \cdot 88} = 0.15194.$$

Sollen zwey herauskommen, so ist $b = 2$ und

$$w = \frac{85}{66 \cdot 89} = 0.01447.$$

Sollen endlich alle drey herauskommen, so ist $b = 3$ und $w = \frac{1}{11748}$ wie in A.

E. Welches ist aber die Wahrscheinlichkeit, daß von zwey gesetzten Nummern wenigstens eine, vielleicht auch alle beyde, heraus kommen?

Diese Wahrscheinlichkeit ist (nach N. III. dieser Anmerkungen) die Summe der Wahrscheinlichkeit von D Ex. 1 und A Ex. 2, also gleich

$$\frac{2}{801} + \frac{85}{801} = \frac{87}{801} = 0.10861$$

und eben so ist, nach dem Vorhergehenden, die Wahrscheinlichkeit, daß von drey gesetzten Nummern wenigstens eine, oder zwey oder vielleicht alle drey herauskommen, gleich

$$0.00008 + 0.15194 + 0.01447 = 0.16649$$

F. Ist x die Summe, welche die Lotterie dem Spieler, wenn er gewinnt, bezahlen sollte, und m das, was der Spieler auf seine Nummern gesetzt hat, so ist

$$x = \frac{m}{w}$$

wo w die in dem Vorhergehenden angeführten Wahrscheinlichkeiten des Gewinns bezeichnet. So sollte die Lotterie nach Nr. A zahlen

für einen	Estratto 18 m	die Lotterie de France	17 m
„ „	Ambo 400 m	zahlt aber nur	270 m
„ „	Terno 11748 m		5500 m
„ „	Quaterno 511038 m (hear, hear!)		60000 m u. s. f.

G. Beschließen wir diese Bemerkungen mit folgender Aufgabe. In einer Lotterie von n Nummern werden bey jeder Ziehung r Nummern gezogen. Welches ist die Wahrscheinlichkeit w, daß in k auf einander folgenden Ziehungen alle n Nummern herausgekommen seyn werden?

Es ist $w = 1 - n\left(\frac{n-r}{n}\right)^k + \frac{n.n-1}{1.2}\left(\frac{n-r.n-r-1}{n.n-1}\right)^k$

$- \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\left(\frac{n-r.n-r-1.n-r-2}{n.n-1.n-2}\right)^k + \text{u. s. f.}$

Ex. Für $n = 90$, $r = 5$ und $k = 100$ ist $w = 0.741$, also um $\frac{1}{5}$ größer als $\frac{1}{2}$. Für $k = 85$ wird nahe $w = \frac{1}{2}$.

VIII. Zeugenaussagen.

Ex. I. Eine Urne enthält n Nummern. Eine Person, die bey der Ziehung einer dieser Nummern gegenwärtig war, sagt aus, daß die Nummer a gezogen worden sey. Welches ist die Wahrscheinlichkeit w, daß diese Zahl a in der That gezogen worden ist?

Sey p die Wahrhaftigkeit des Zeugen, oder die Wahrscheinlichkeit, daß er nicht zu betriegen suche, und r die Sicherheit des Zeugen oder die Wahrscheinlichkeit, daß er sich selbst nicht betriege, d. h. sich nicht irre.

Dieß vorausgesetzt findet man

$$w = pr + \frac{(1-p)(1-r)}{n-1}$$

Ist also $r = 1$, d. h., irrt sich der Zeuge nicht, so ist $w = p$ oder die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist gleich der Wahrhaftigkeit des Zeugen. Eben so ist für $p = 1$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich $w = r$.

Ist n eine sehr große Zahl, so ist nahe $w = pr$, oder die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist gleich der Wahrhaftigkeit des Zeugen, multiplicirt in die Sicherheit desselben.

Dabey wurde vorausgesetzt, daß der Zeuge, wenn er sich irrt, eben so leicht auf eine, als auf eine andere der in der That nicht herausgekommenen Nummern verfallen kann. Wenn aber einige von ihnen unter einander eine größere Ähnlichkeit haben und daher leichter verwechselt werden können; wenn der Zeuge für bestimmte Zahlen ein besonderes Interesse hat u. dgl., so werden die vorhergehenden Resultate nicht mehr richtig seyn.

Ex. II. Die Urne enthalte $n - 1$ schwarze und eine weiße Kugel. Ein Zeuge sagt aus, es sey eine weiße Kugel gezogen worden.

Welches ist die Wahrscheinlichkeit w, daß in der That eine weiße Kugel gezogen worden ist?

Haben wieder p und r die vorige Bedeutung und setzt man

$$q = p\,r + (1-p)(1-r)$$

so findet man

$$w = \frac{q}{q + (1-q)(n-1)}$$

und eben so ist die Wahrscheinlichkeit w', daß nicht eine weiße, sondern eine schwarze Kugel gezogen wurde

$$w' = 1 - w = \frac{(1-q)(n-1)}{q + (1-q)(n-1)}$$

Ist die Zahl n der Kugeln sehr groß, so wird die Aussage der Zeugen sehr zweifelhaft, wie der Ausdruck für w zeigt, wenn nicht zugleich q sehr nahe an 1 ist. Je größer aber die Zahl der Kugeln ist, desto außerordentlicher erscheint auch das von den Zeugen ausgesagte Ereigniß, zum Beweise, wie sehr die Außerordentlichkeit einer Begebenheit die Aussage der Zeugen schwächt.

Die Größe q zeigt die Wahrscheinlichkeit an, daß der Zeuge wirklich die Wahrheit gesagt habe, so wie sie ihm erschien. Daß er also weder betrogen noch sich geirrt, oder daß er zugleich betrogen und sich geirrt habe.

Ex. III. Eine Urne enthalte eine Anzahl n weißer und eine andere Urne eine eben so große Anzahl schwarzer Kugeln. Man zieht aus einer dieser Urnen eine Kugel und wirft sie in die andere Urne, und zieht endlich aus dieser andern Urne wieder eine Kugel.

Ein Zeuge sagt aus, daß in der ersten Ziehung eine weiße Kugel gezogen worden sey, und ein zweyter Zeuge sagt aus, daß auch in der zweyten Ziehung eine weiße Kugel gezogen worden sey. Welches ist die Wahrscheinlichkeit w, daß wirklich in beyden Ziehungen eine weiße Kugel gezogen worden sey?

Bezeichnet wieder q die Wahrscheinlichkeit, daß der erste Zeuge und q' die, daß der zweyte die Wahrheit gesagt habe, wo also wieder $q = p\,r + (1-p)(1-r)$ und $q' = p'r' + (1-p')(1-r')$ ist, so sey der Kürze wegen

$$Q = q\,q' + (1-q)(1-q')$$

und es ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$w = \frac{q\,q'}{Q + (1-Q)\,n}$$

also wieder diese Wahrscheinlichkeit desto kleiner, je größer die Anzahl

der Kugeln, d. h. je außerordentlicher das von den Zeugen ausgesagte Ereigniß ist.

Ex. IV. Zwey Zeugen sagen über irgend ein Ereigniß übereinstimmend dasselbe aus. Welches ist die Wahrscheinlichkeit w, daß dieses Ereigniß in der That statt hatte?

Eine Urne enthalte z. B. n Nummern, und beyde Zeugen sagen aus, daß die Nummer a gezogen worden sey.

Sind p und p′ die Grade der Wahrhaftigkeit der beyden Zeugen und nimmt man $r = r' = 1$, d. h. nimmt man an, daß sie sich nicht geirrt haben, so findet man die Wahrscheinlichkeit, daß die Nummer a in der That gezogen worden ist

$$w = \frac{1}{1 + \frac{(1-p)(1-p')}{(n-1)\,p\,p'}} \quad \ldots \quad (A)$$

also auch die Wahrscheinlichkeit, daß sie nicht gezogen worden ist

$$w' = 1 - w = \frac{1}{1 + \frac{(n-1)\,p\,p'}{(1-p)(1-p')}}$$

Ist $n = 2$, so sind beyde Wahrscheinlichkeiten einander gleich und man hat

$$w = w' = \frac{p\,p'}{p\,p' + (1-p)(1-p')}$$

und dieß ist überhaupt der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit eines von zwey Zeugen übereinstimmend ausgesagten Ereignisses, wenn das Eintreffen und Nichteintreffen dieses Ereignisses gleich möglich ist.

Ist die Wahrhaftigkeit beyder Zeugen gleich groß, so ist die letzte Wahrscheinlichkeit gleich

$$\frac{p^2}{p^2 + (1-p)^2}$$

und überhaupt: sagen r gleich wahrhafte Zeugen die Existenz eines solchen Ereignisses aus, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß dasselbe in der That statt gehabt habe, gleich

$$\frac{p^r}{p^r + (1-p)^r}$$

vorausgesetzt, daß die Existenz und Nichtexistenz des Ereignisses gleich möglich ist.

Ist die Anzahl n der Nummern der Urne sehr groß, so wird in der Gleichung (A) die Größe w nahe gleich 1 oder es ist ungemein wahrscheinlich, daß die Nummer a in der That gezogen worden ist.

Die Ursache davon ist, weil die Zeugen, wenn sie ja betriegen wollten, nicht alle dieselbe Nummer angegeben haben würden.

Ex. V. Eine Urne enthalte n Nummern. Ein erster Zeuge sagt aus, daß die Nummer a, ein zweyter aber, daß die Nummer b gezogen worden sey. Die Wahrhaftigkeit dieser beyden Zeugen sey p und p′ und ihre Sicherheit wieder $r = r' = 1$.

Dieß vorausgesetzt, ist die Wahrscheinlichkeit w, daß die Zahl a in der That gezogen worden ist,

$$w = \frac{p\,(1-p')}{1 - p\,p' - \frac{(1-p)\,(1-p')}{n-1}}$$

Ist $n = 2$, d. h., ist die Existenz der beyden Ereignisse, welche die Zeugen aussagen, eben so wahrscheinlich, als die Nichtexistenz derselben, und ist überdieß $p = p'$, so wird die letzte Gleichung $w = \frac{1}{2}$ und daher auch die Wahrscheinlichkeit w′ des Gegentheils, daß nämlich die Zahl b gezogen worden ist, $w' = 1 - w = \frac{1}{2}$, also $w = w'$, weil beyde Zeugnisse sich gegenseitig aufheben.

Wird überhaupt ein Ereigniß dieser Art von f Zeugen bejaht und von g Zeugen verneint, und ist die Wahrhaftigkeit aller Zeugen gleich groß, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß dieses Ereigniß sich in der That zugetragen habe, gleich

$$\frac{p^{f-g}}{p^{f-g} + (1-p)^{f-g}}$$

d. h. diese Wahrscheinlichkeit ist, nach Ex. IV. eben so groß, als wäre sie von $f - g$ Zeugen bestätiget worden.

Ex. VI. Nehmen wir nun an, die Aussage, daß z. B. aus einer Urne mit n Nummern die Nummer a gezogen worden, sey nach und nach, auf dem Wege der Tradition, durch r Zeugen bestätiget worden, so ist die Wahrscheinlichkeit w, daß dieses Ereigniß in der That statt gehabt hat,

$$w = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \frac{(np_1 - 1)(np_2 - 1)(np_3 - 1)\ldots(np_r - 1)}{(n-1)^r} \quad \ldots \text{(B)}$$

wo $p_1, p_2, p_3 \ldots$ die Wahrhaftigkeit des 1, 2, 3 . . Zeugen bezeichnet.

Ist n unendlich groß, so ist

$$w = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \ldots p_r$$

Ist $n = 2$, d. h., ist die Existenz des Ereignisses eben so möglich, als die Nichtexistenz desselben, so ist

$$w = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p_1 - 1)(2p_2 - 1)(2p_3 - 1)\ldots(2p_r - 1)$$

Überhaupt, je weiter diese Reihe der Traditionen sich erstreckt, desto mehr nähert sich der Werth von w der Gränze $\frac{1}{n}$, d. h. der absoluten Wahrscheinlichkeit (Nr. I.), daß die Nummer a in der That gezogen worden ist. Das Glied $\frac{n-1}{n}$; $\frac{(np_1 - 1)}{(n-1)}$ . . . ist also das, um was diese Reihe von Zeugen die absolute Wahrscheinlichkeit des Ereignisses vergrößert. Man sieht wie die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses durch spätere Zeugen immer vermindert wird, da die Werthe der Brüche $\frac{np_1 - 1}{n-1}$; $\frac{np_2 - 1}{n-1}$ . . immer kleiner werden, indem die Werthe der Größen $p_1\ p_2\ p_3$ . . mit der Zeit immer abnehmen. Die Folge der Zeiten schwächt daher die Verläßlichkeit unserer historischen Nachrichten eben so, wie sie allmählig die Denkmähler zerstört, welche wir den wichtigen Personen und Ereignissen der Geschichte aufgestellt haben. Die Buchdruckerkunst ist in der That eines der mächtigsten Mittel, diesem Verfalle entgegenzuwirken. Aber auch sie wird nicht verhindern können, daß endlich nach Jahrtausenden von physischen und moralischen Revolutionen, welche die Oberfläche der Erde zu allen Zeiten in Bewegung setzen, selbst diejenigen Thatsachen der Geschichte dunkel und zweifelhaft werden, die jetzt allgemein als vollkommen gewiß anerkannt sind.

IX. Wahrscheinlichkeit der Urtheilssprüche.

Ist $p + q$ die Anzahl der Richter eines Tribunals, von welchen p den Angeklagten verurtheilen und q ihn freysprechen, so ist die Wahrscheinlichkeit w eines in dem gesprochenen Urtheile zu befürchtenden Fehlers, wenn man der Kürze wegen $a = p + q + 1$ setzt,

$$w = \frac{1}{2^a}\left[1 + a + \frac{a.a-1}{1.2} + \frac{a.a-1.a-2}{1.2.3}\ldots + \frac{a.a-1.a-2\ldots(a-q+1)}{1.2.3\ldots q}\right]$$

Wird zur Gültigkeit des Ausspruches die Unanimität der Stimmen gefordert, so ist $q = 0$ und daher

$$w = \frac{1}{2^a}$$

Ex. Ist $p = 5$, $q = 3$ also $a = 9$ so ist

$$w = \frac{1}{2^9}\left(1 + 9 + \frac{9.8}{2} + \frac{9.8.7}{2.3}\right) = \frac{1}{2^9}(130) = 0.254$$ wie im Text.

Ist die Anzahl der Richter gleich 8, also $a = 9$ und wird die Unanimität der Stimmen gefordert, so ist

$$w = \frac{1}{2^9} = \frac{1}{512} = 0.00195.$$

Ist $p = 90$ und $q = 54$ also $a = 145$, so findet man

$$w = \frac{1}{773} = 0.0013$$

Ist $p = 112$ und $q = 100$, so findet man $w = \frac{1}{4.889} = 0.2045$.

Zweyte Abtheilung.

Methode der kleinsten Quadrate,

oder

Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung

auf

Beobachtungen.

Erstes Capitel.

§. 1. Seyen $x\ x_1\ x_2 \ldots$ die durch Beobachtungen unmittelbar erhaltenen Größen, z. B. die Polhöhen des Beobachtungsortes, und N die Anzahl dieser Beobachtungen. Sind diese Beobachtungen alle von gleichem Werthe, so daß man in Beziehung auf ihre Genauigkeit keinen Unterschied unter ihnen machen kann, so ist der wahrscheinlichste Werth dieser Größen, den wir durch X bezeichnen wollen, gleich dem arithmetischen Mittel derselben, oder es ist

$$X = \frac{x + x_1 + x_2 + \ldots}{N}$$

oder, wenn man der Kürze wegen $\Sigma x = x + x_1 + x_2 + \ldots$ setzt, so ist

$$X = \frac{\Sigma x}{N}$$

§. 2. Es sey nun ε der Unterschied zwischen diesem wahrscheinlichsten Werthe X unserer Größe und dem unmittelbaren Resultate x der ersten Beobachtung, oder es sey $\varepsilon = X - x$ und eben so

für die zweyte Beobachtung $\varepsilon_1 = X - x_1$,
für die dritte „ „ $\varepsilon_2 = X - x_2$ u. s. f.

Man kann diese Größen $\varepsilon\ \varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots$ als die Fehler der einzelnen Beobachtungen ansehen. Bezeichnet man wieder der Kürze

wegen die Summe der Quadrate der Größen $\varepsilon_2 \cdot \varepsilon_1^2 \cdot \varepsilon_2^2 \ldots$ durch $\Sigma\varepsilon^2$, so daß

$$\Sigma\varepsilon^2 = \varepsilon^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \text{ ist,}$$

so heißt die Größe

$$P = \frac{N^2}{2\Sigma\varepsilon^2}$$

das Gewicht jener Bestimmung von X als des wahrscheinlichsten Werthes von x. Man sieht, daß dieses Gewicht desto größer seyn wird, je größer die Anzahl N der Beobachtungen und je kleiner die Größen $\varepsilon\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots$ das heißt, je genauer diese Beobachtungen selbst sind.

§. 3. Nennet man dann Φ den mittleren zu befürchtenden Fehler, den man bey der Bestimmung der Größe X (nach dem in §. 1. gezeigten Verfahren) begangen haben mag, so ist

$$\Phi = \frac{1}{2\sqrt{\pi P}} = \frac{0.282095}{\sqrt{P}}$$

wo $\pi = 3.1415926$ das Verhältniß der Peripherie des Kreises zu seinem Durchmesser ist. Dieser mittlere zu befürchtende Fehler Φ ist die Summe der Producte jedes Fehlers der einzelnen Beobachtungen in seine Wahrscheinlichkeit.

§. 4. Von diesem mittleren zu befürchtenden Fehler unterscheidet sich der wahrscheinliche Fehler F, den man bey dieser Bestimmung von X begangen haben kann. Dieser Fehler F ist nämlich derjenige, von dem es gleich wahrscheinlich ist, daß man ihn begangen oder daß man ihn auch nicht begangen habe. Dieser wahrscheinliche Fehler ist

$$F = \frac{0.4769363}{\sqrt{P}}$$

§. 5. Die beyden Fehler Φ und F beziehen sich auf das Resultat X, welches man (durch das Verfahren des §. 1) aus den einzelnen Beobachtungen $x\ x_1\ x_2 \ldots$ abgeleitet hat. Nennt man nun eben so f den wahrscheinlichen Fehler jeder einzelnen dieser Beobachtungen, so ist

$$f = 0.4769363 \sqrt{\frac{N}{P}},$$

und die wahrscheinliche Gränze $f \pm \Delta f$ dieses Fehlers f ist

$$f \pm \Delta f = f.\left(1 + \frac{0.4769363}{\sqrt{N}}\right),$$

wo in allen diesen Ausdrücken wegen dem Wurzelzeichen die dasselbe enthaltende Größe immer mit den doppelten Zeichen $\pm$ verstanden wird. Der letzte Ausdruck sagt daher, daß der wahre, wirklich statthabende Werth von f zwischen die beyden Gränzen fallen wird:

$$f\left(1 + \frac{0.4769363}{\sqrt{N}}\right), \text{ und}$$

$$f\left(1 - \frac{0.4769363}{\sqrt{N}}\right),$$

oder daß man 1 gegen 1 wetten kann, daß der wahre Werth von f zwischen diese beyden Größen fallen wird.

§. 6. Um aber auch die Wahrscheinlichkeit w zu finden, daß eine der bisher bestimmten Größen, daß z. B. der mittlere zu befürchtende Fehler Φ des Resultates X zwischen zwey andere, willkührliche Gränzen falle, so findet man die Wahrscheinlichkeit w, daß diese Größe Φ zwischen den Gränzen $\pm \frac{r}{\sqrt{P}}$ liege, wo r irgend eine willkührliche Größe, und, wie zuvor, $P = \frac{N^2}{2\Sigma\varepsilon^2}$ ist,

$$w = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-r^2} dr,$$

wo $e = 2.7182818$ die Basis der natürlichen Logarithmen ist, und wo das Integral von $r = 0$ bis $r = \infty$ genommen wird. Man findet aber für dieses Integral, wenn $r < 1$ ist

$$\int e^{-r^2} dr = r - \frac{r^3}{3} + \frac{1}{1.2} \cdot \frac{r^5}{5} - \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{r^7}{7} + \frac{1}{1.2.3.4} \cdot \frac{r^9}{9} -$$

oder

$$\int e^{-r^2} dr = \frac{r}{e^{r^2}}\left[1 + \frac{2r^2}{1.3} + \frac{(2r^2)^2}{1.3.5} + \frac{(2r^2)^3}{1.3.5.7} + \cdot\cdot\right]$$

und wenn $r > 1$ ist,

$$\int e^{-r^2} dr = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} - \frac{1}{2r.e^{r^2}}$$

$$\left[1 - \frac{1}{2r^2} + \frac{1.3}{(2r^2)^2} - \frac{1.3.5}{(2r^2)^3} + \frac{1.3.5.7}{(2r^2)^4} - \ldots\right]$$

Entwickelt man diese Ausdrücke für einige Werthe von r, so gibt die vorhergehende Gleichung

$$w = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-r^2} dr$$

folgende kleine Tafel:

r	w	$\frac{w}{1-w}$
0.4769363	0.5	1.0000000
0.5951161	0.6	1.5000000
0.7328691	0.7	2.3333333
0.9061939	0.8	4.0000000
1.0000000	0.8427008	5.3572874
1.1630872	0.9	9.0
1.8213864	0.99	99.0
2.3276754	0.999	999.0
2.7510654	0.9999	9999.0
∞	1.0000000	∞

Diese Tafel zeigt z. B., daß die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler Φ zwischen den Gränzen $\pm \frac{1}{\sqrt{P}}$ liege, gleich $w = 0.8427008$, und daß also auch die Wahrscheinlichkeit des Gegentheiles, daß Φ nicht zwischen diesen Gränzen liege, gleich $1 - w = 0.1572992$ ist, weil jede Wahrscheinlichkeit, daß irgend ein Fall eintrete, und die, daß er nicht eintrete, zusammen gleich der Wahrheit d. h. gleich 1 ist. Man kann daher die Größe w

gegen 1 — w d. h., man kann die Größe $\frac{w}{1-w} = 5.3572874$ gegen die Einheit wetten, daß der Fehler Φ zwischen den Gränzen $\pm \frac{1}{\sqrt{P}}$ enthalten, oder mit andern Worten, daß der Fehler Φ kleiner als $\frac{1}{\sqrt{P}}$ ist. Eben so kann man 9999 gegen 1 oder nahe 10000 gegen 1 wetten, daß der Fehler Φ kleiner als $\frac{2.7510654}{\sqrt{P}}$ ist; aber man kann nur 4 gegen 1 wetten, daß der Fehler Φ kleiner als $\frac{0.9061939}{\sqrt{P}}$ ist u. s. w.

§. 7. Wir wollen nun auf das Vorhergehende ein Beyspiel anwenden, um den Gebrauch der bisher aufgestellten Ausdrücke deutlich zu machen.

Zehn Beobachtungen unsers Meridiankreises haben folgende Polhöhen der Wiener Sternwarte gegeben:

$$\begin{aligned} x &= 48^\circ\,12'\,35.''2 \\ x_1 &= 34.6 \\ x_2 &= 35.4 \\ x_3 &= 35.0 \\ x_4 &= 34.2 \\ x_5 &= 34.7 \\ x_6 &= 35.4 \\ x_7 &= 34.8 \\ x_8 &= 35.6 \\ x_9 &= 35.2 \end{aligned}$$

Arithm. Mittel $X = 48^\circ\,12'\,35.''01 = \frac{\Sigma x}{N}$, wo $N = 10$ ist.

Dieser Werth von X ist also der wahrscheinlichste Werth der Polhöhe jenes Beobachtungsortes, wie er aus diesen zehn Beobachtungen folgt.

I. Es sind aber die Differenzen dieses Resultates X von den einzelnen Beobachtungen

$X - x = \varepsilon = 35.01 - 35.2$, oder

ε	$= -0.19$,	und ε^2	$= 0.0361$
ε_1	$= 0.41$	ε^2_1	$= 0.1861$
ε_2	$= -0.39$	ε^2_2	$= 0.1521$
ε_3	$= 0.01$	ε^2_3	$= 0.0001$
ε_4	$= 0.81$	ε^2_4	$= 0.6561$
ε_5	$= 0.31$	ε^2_5	$= 0.0961$
ε_6	$= -0.39$	ε^2_6	$= 0.1521$
ε_7	$= 0.21$	ε^2_7	$= 0.0441$
ε_8	$= -0.59$	ε^2_8	$= 0.3481$
ε_9	$= -0.19$	ε^2_9	$= 0.0361$
		$\Sigma\varepsilon^2$	$= 1.7070$

Dieses vorausgesetzt ist das Gewicht P der vorhergehenden Bestimmung von X

$$P = \frac{N^2}{2\Sigma\varepsilon^2} = 29.291.$$

Der mittlere zu befürchtende Fehler Φ dieses Resultates X ist

$$\Phi = \frac{1}{2\sqrt{\pi P}} = \pm\ 0.''0521.$$

Der wahrscheinliche Fehler F dieses Resultates ist

$$F = \frac{0.47694}{\sqrt{P}} = \pm\ 0.0881.$$

Endlich ist der wahrscheinliche Fehler f jeder einzelnen Beobachtung

$$f = 0.47694\ \sqrt{\frac{N}{P}} = \pm\ 0.2787,$$

und die wahrscheinliche Gränze $f \pm \Delta f$ dieses letzten Fehlers ist

$$f \pm \Delta f = f\left(1 \pm \frac{0.47694}{\sqrt{N}}\right),$$

das heißt

$$0.2787 \pm 0.0420 = \begin{matrix} 0.3207 \\ 0.2367 \end{matrix}.$$

Man kann daher sagen, daß mit diesem Instrumente unter übrigens gleichen Umständen, jede einzelne Beobachtung dieser Art dem wahrscheinlichen Fehler 0."28 unterworfen ist, und daß dieser Fehler in der Ordnung nicht größer als 0."32, und nicht kleiner als 0."24 seyn wird, und dieser Schluß wird desto genauer seyn, je größer die ihm zu Grunde gelegte Anzahl von Beobachtungen gewesen ist.

II. Welches ist aber die Wahrscheinlichkeit w, daß die Gränzen $\Delta\Phi$ des mittleren zu befürchtenden Fehlers die Größe

$$\Delta\Phi = \pm \frac{r}{\sqrt{P}}$$

nicht übersteige, oder daß der mittlere zu befürchtende Fehler kleiner, oder wenigstens nicht größer als $\frac{r}{\sqrt{P}}$ sey?

Sey $r = 0.4769363$, so ist

$$\Delta\Phi = \frac{0.4769363}{5.4121} = 0.0881,$$

und da zu diesem r in der Tafel des §. 6. der Werth $w = 0.5$, oder $\frac{w}{1-w} = 1$ gehört, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler $\Delta\Phi$ nicht größer als 0.0881 sey, gleich 0.5, oder man kann 1 gegen 1 wetten, daß der Fehler, den man in der Bestimmung von X begangen hat, nicht größer als 0.0881 sey. Auch ist der wahrscheinliche Fehler F des Resultates X in N.I ebenfalls gleich dieser Größe 0.0881 gefunden worden.

Für $r = 1$ gibt die Tafel $\frac{w}{1-w} = 5.357$, und

$$\Delta\Phi = \frac{1}{5.4121} = 0.1848,$$

für $r = 2.32767$ gibt die Tafel $\frac{w}{1-w} = 999$, und

$$\Delta\Phi = \frac{2.32767}{5.4121} = 0.4301.$$

Man kann also 5.357 gegen 1 wetten, daß die obige Bestimmung von Φ nicht über 0."1848, und man kann 999 gegen 1 oder nahe 1000 gegen 1 wetten, daß diese Bestimmung nicht über 0."4301 fehlerhaft ist.

§. 8. Die vorhergehenden Bestimmungen lassen sich noch zur Rechnung etwas bequemer machen, ohne dadurch der Genauigkeit der Resultate in Φ, F und f bedeutend zu schaden. Man kann nämlich statt der bisher gebrauchten Summe der Quadrate der Fehler $\Sigma\varepsilon^2 = \varepsilon^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 +$ auch die Summe dieser Fehler selbst, oder die Größe $\Sigma\varepsilon = \varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots$ einführen, wo aber dann alle diese Größen $\varepsilon\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots$ positiv genommen werden müssen. Dieses vorausgesetzt, findet man für den wahrscheinlichen Fehler f jeder einzelnen Beobachtung den genäherten Ausdruck

$$f = 0.84535\ \frac{\Sigma\varepsilon}{N}.$$

In unserem Beyspiele ist $\Sigma\varepsilon = 3.50$, also

$$f = 0.296$$

nur 0.017 von dem im §. 7. verschieden.

Setzt man also diese beyden Werthe von f einander gleich, so erhält man

$$0.84535\ \frac{\Sigma\varepsilon}{N} = 0.47694\ \sqrt{\frac{N}{P}},$$

oder das Gewicht

$$P = 0.31831\ \frac{N^3}{(\Sigma\varepsilon)^2}.$$

Ist so P gefunden, so hat man, wie im §. 7., die genäherten Werthe

$$\Phi = \frac{1}{2\sqrt{\pi P}},$$

$$F = \frac{0.47694}{\sqrt{P}},$$

$$f = 0.47694\ \sqrt{\frac{N}{P}}, \text{ und}$$

$$\Delta f = f\ \left(1 \pm \frac{0.47694}{\sqrt{N}}\right).$$

In unserem Beyspiele ist, wenn alle ε positiv genommen werden, $\Sigma\varepsilon = 3.50$, also

$$P = 25.984,$$
$$\Phi = 0.055,$$
$$F = 0.094,$$
$$f = \pm 0.296,$$

$$\Delta f = 0.296 \pm 0.045 = \begin{matrix} 0.341 \\ 0.251 \end{matrix},$$

welche Werthe nicht beträchtlich von denen des §. 7. verschieden sind.

§. 9. Ist überhaupt f der wahrscheinliche Fehler einer einzelnen Beobachtung, und g der Grad ihrer Präcision (Genauigkeit), und ist eben so F der wahrscheinliche Fehler des Resultates aus mehreren Beobachtungen, und G die Genauigkeit dieses Resultates, so ist

$$\frac{F}{f} = \frac{g}{G}.$$

Also auch, wenn man die Genauigkeit g der einzelnen Beobachtungen zur Einheit annimmt, die Genauigkeit des Resultates

$$G = \frac{f}{F}.$$

Substituirt man hier die obigen Werthe von f und F, so ist

$$G = \sqrt{N},$$

also in unserem Beyspiele

$$G = \sqrt{10} = 3.1623.$$

§. 10. Bisher haben wir die einzelnen Beobachtungen ohne Unterschied von gleichem Werthe vorausgesetzt. Es sey nun $c\, c_1 \ldots$ der Werth der 1, 2, 3 . . Beobachtung (so daß man die 2 zweymal, die 3 dreymal besser voraussetzt, als die erste,

wenn $c=1$, $c_1=2$, $c_2=3$ ist), so hat man für den wahrscheinlichsten Werth des Resultates

$$X=\frac{c^2x+c_1^2x+c_2^2x+c_3^2x+}{c^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2+}=\frac{\Sigma c^2x}{\Sigma c^2}.$$

Sucht man dann wieder die Größe

$$\varepsilon=X-x,\ \varepsilon_1=X-x_1,\ \varepsilon_2=X-x_2\ldots,$$

und setzt man

$$\Sigma c^2\varepsilon^2=c^2\varepsilon^2+c_1^2\varepsilon_1^2+c_2^2\varepsilon_2^2+\cdot$$

so erhält man für P, Φ, $F\ldots$ die Ausdrücke

$$P=\frac{N}{2}\cdot\frac{\Sigma c^2}{\Sigma c^2\varepsilon^2},\quad \Phi=\frac{0.282095}{\sqrt{P}},\quad F=\frac{0.47694}{\sqrt{P}},$$

$$G=\sqrt{\Sigma c^2},\quad f=0.47694\sqrt{\frac{\Sigma c^2}{P}},$$

$$f+\Delta f=f\left(1+\frac{0.47694}{\sqrt{\Sigma c^2}}\right),$$

wo f der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung, deren Genauigkeit als Einheit genommen wird, und wo G die Genauigkeit des Resultates X bezeichnet, wenn die Genauigkeit einer Beobachtung als Einheit genommen wird.

Endlich ist der wahrscheinliche Fehler

der ersten Beobachtung

$$\frac{f}{c},$$

der zweyten Beobachtung

$$\frac{f}{c_1},$$

der dritten Beobachtung

$$\frac{f}{c_2}\text{ u. s. w.}$$

Setzt man in diesen Ausdrücken $c = c_1 = c_2 \ldots = 1$, so ist $\Sigma c^2 \varepsilon^2 = \Sigma \varepsilon^2$ und $\Sigma c^2 = N$, und man erhält die Gleichungen des §. 7. wieder.

Exempel. Seyen die drey Polhöhen gegeben

48°	12′	33″	und der Werth dieser Beobachtung sey			$c = 1$
48	12	34	„	„	„	$c_1 = 2$
48	12	35	„	„	„	$c_2 = 3$

so hat man

$c^2 x = 33$	$c^2 = 1$
$c^2_1 x = 136$	$c^2_1 = 4$
$c^2_2 x = 315$	$c^2_2 = 9$
$\Sigma c^2 x = 484$	$\Sigma c^2 = 14$

$$X = \frac{\Sigma c^2 x}{\Sigma c^2} = 34.571, \quad \varepsilon = X - x = 1.571, \quad c^2 \varepsilon^2 = 2.468$$

$$\varepsilon_1 = X - x_1 = 0.571, \quad c^2_1 \varepsilon^2_1 = 1.304$$

$$\varepsilon_2 = X - x_2 = -0.429, \quad c^2_2 \varepsilon^2_2 = 1.656$$

$$\Sigma c^2 \varepsilon^2 = 5.428$$

Man hat daher

$X = 34.''571$	$F = 0.240$
$P = 3.959$	$G = 3.742$
$\Phi = 0.142$	$f = 0.415$

und der wahrscheinliche Fehler

der ersten Beobachtung

$$\frac{f}{c} = 0.415,$$

der zweyten Beobachtung

$$\frac{f}{c_1} = 0.207,$$

der dritten Beobachtung

$$\frac{f}{c_2} = 0.138,$$

und man kann 1000 gegen 1 wetten, daß der Fehler von X nicht größer ist als 1.″17.

Hätte man in diesem Beyspiele $c = c_1 = c_2 = 1$ genommen, so würde man nach §. 7. erhalten haben

$$X = \frac{\Sigma x}{N} = 34.''00, \quad \Sigma \varepsilon^2 = 2,$$

$$P = 2.25, \quad \Phi = 0.188, \quad F = 0.318$$
$$f = 0.551$$
$$G = 1.732,$$

und man kann 1000 gegen 1 wetten, daß der Fehler von X nicht größer ist als 1.''55.

Zweytes Capitel.

§. 11. Es werde nun durch eine Anzahl von Beobachtungen irgend eine Größe gesucht, deren Werth man schon beynahe kennt d. h. für welche man schon einen genäherten analytischen Ausdruck hat. Man soll diesen Ausdruck durch Hülfe jener Beobachtungen genauer bestimmen.

Um diesen Gegenstand sogleich durch ein Beyspiel zu fixiren, so ist bekanntlich der Höhenunterschied in Toisen von zwey Orten, in welchen man die Barometerhöhen b und b' beobachtet hat, gleich

$$B = 9437 \log \frac{b}{b'},$$

wenn man die Correctionen wegen der Temperatur und Polhöhe hier, der Kürze wegen, vernachlässiget. Da aber dieser Factor 9437, von welchem die Bestimmung des Höhenunterschiedes zweyer Orte vorzüglich abhängt, noch keineswegs genau bekannt ist, so wollen wir die Verbesserung desselben mit x bezeichnen, so daß der wahre Werth dieses Factors gleich $9437 + x$, und daß daher der wahre Ausdruck der Höhendifferenz gleich

$$(9437 + x) \log \frac{b}{b'}$$

Toisen seyn soll, in welchem die Correction x noch unbekannt ist.

Beobachtet man nun in der That an zwey Orten die Barometerhöhen, und kennt man zugleich aus andern unmittelbaren z. B. aus trigonometrischen Messungen die wahre Höhendifferenz A dieser beyden Orte, so wird man, da auch

$$(9437 + x) \log \frac{b}{b'}$$

diese wahre Höhendifferenz ausdrückt, die Gleichung erhalten

$$A = (9437 + x) \log \frac{b}{b'}, \text{ oder}$$

$$A = B + x \log \frac{b}{b'} \ldots . (I),$$

und da in dieser Gleichung bloß die unbekannte Größe x vorkommt, so wird man sie durch diese Gleichung selbst bestimmen können, und so den wahren Werth 9437 + x jenes Factors erhalten.

I. Sey z. B. auf der untern dieser beyden Stationen die Barometerhöhe b = 27.27 Zoll, und auf der obern b' = 22.47 beobachtet worden. Eine trigonometrische Messung aber habe die wahre Höhendifferenz dieser beyden Stationen gleich

$$A = 794.5$$

Toisen gegeben. Wir haben daher

$$\log \frac{b}{b'} = 0.084082, \text{ und}$$

$$B = 9437 \log \frac{b}{b'} = 793.482,$$

und die vorhergehende Gleichung (I) geht daher in folgende über

$$A = B + 0.084082\, x,$$

wo aus der Berechnung B = 793.482, und aus der unmittelbaren trigonometrischen Messung A = 794.5 folgt.

Allein das Resultat A dieser Messung kann, da sie wieder aus einer Beobachtung, wenn gleich aus einer viel genaueren, als die der Barometerhöhen, abgeleitet ist, ebenfalls nicht als ganz wahr angesehen werden. Nehmen wir daher an, daß ε der

Fehler dieser Messung sey, oder daß $A+\varepsilon$ der wahre Werth der Größe A sey, so wird die letzte Gleichung seyn

$$A + \varepsilon = B + 0.084082\ x,$$

oder wenn man die Differenz der unmittelbaren Messung, und der Rechnung nach der aufgestellten Formel, d. h. wenn man die Größe $A - B$ gleich δ setzt,

$$\delta + \varepsilon = 0.084082\ x,$$

oder endlich überhaupt, wenn man den Coefficienten von x durch a bezeichnet,

$$\varepsilon = a\ x - \delta,$$

und dieß ist die Bedingungsgleichung der ersten Beobachtung, in welcher also a und δ bekannte Größen, x die zu bestimmende Größe, und ε der noch unbekannte Fehler der ersten Messung ist. Eine zweyte Beobachtung wird eben so die Bedingungsgleichung

$$\varepsilon_1 = a_1\ x - \delta_1,$$

und eine dritte die Gleichung

$$\varepsilon_2 = a_2\ x - \delta_2,$$

geben u. s. f., und es wird nun darauf ankommen, denjenigen Werth der Größe x zu finden, der allen diesen Bedingungsgleichungen am besten entspricht.

Die Theorie der kleinsten Quadrate zeigt, das dieser Werth der Größe x, oder daß der wahrscheinlichste Werth X derselben derjenige ist, für welchen die Summe der Quadrate aller Beobachtungsfehler $\varepsilon\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots$ ein Kleinstes ist, oder für welchen man hat

$$d.(\varepsilon^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \ldots) = 0.$$

Substituirt man aber in dieser Gleichung für $\varepsilon\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots$ ihre vorhergehenden Werthe, so hat man

$$d.(a\,x - \delta)^2 + d.(a_1\,x - \delta_1)^2 + d.(a_2\,x - \delta_2)^2 + \ldots = 0,$$

oder

$$x(a^2 + a_1^2 + a_2^2 + \ldots) - (a\,\delta + a_1\,\delta_1 + a_2\,\delta_2 + \ldots) = 0,$$

oder endlich, wenn man wieder die oben eingeführten Abkürzungszeichen braucht,

$$x \cdot \Sigma a^2 - \Sigma \cdot a\delta = 0,$$

das heißt, da der durch diese Gleichung bestimmte Werth von x der wahrscheinlichste von allen ist, den wir mit X bezeichnet haben,

$$X = \frac{\Sigma \cdot a\delta}{\Sigma a^2},$$

wo $\Sigma a\delta = a\delta + a_1\delta_1 + a_2\delta_2 + \ldots$, und
$\Sigma a^2 = a^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots$ ist.

§. 13. Hat man so den wahrscheinlichsten Werth X der Größe x gefunden, so wird man die Größen P, Φ, F, f und G im Allgemeinen nach ähnlichen Ausdrücken mit denen bestimmen, welche wir im §. 3. und 4. u. s. w. gegeben haben.

Setzt man nämlich

$$\Sigma\varepsilon^2 = (aX - \delta)^2 + (a_1X - \delta_1)^2 + (a_2X - \delta_2)^2 + ,$$

so findet man für das Gewicht P jener Bestimmung des Resultates X den Ausdruck

$$P = \frac{N}{2} \cdot \frac{\Sigma a^2}{\Sigma\varepsilon^2},$$

wo wieder N die Anzahl der Beobachtungen ist.

Um die Größe $\Sigma\varepsilon^2$ zur Rechnung bequemer zu machen, hat man, wenn man den gegebenen Ausdruck von $\Sigma\varepsilon^2$ entwickelt,

$$\begin{aligned}\Sigma\varepsilon^2 &= X^2(a^2 + a_1^2 + a_2^2 +),\\ &-2X(a\delta + a_1\delta_1 + a_2\delta_2 +),\\ &+\delta^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 + ,\end{aligned}$$

oder kürzer ausgedrückt

$$\Sigma\varepsilon^2 = X^2\Sigma a^2 - 2X\Sigma a\delta + \Sigma\delta^2,$$

oder endlich da

$$X = \frac{\Sigma a\delta}{\Sigma a^2} \text{ war,}$$

$$\Sigma\varepsilon^2 = \frac{(\Sigma a\delta)^2}{\Sigma a^2} - \frac{2(\Sigma a\delta)^2}{\Sigma a^2} + \Sigma\delta^2,$$

das heißt

$$\Sigma\varepsilon^2 = \Sigma\delta^2 - \frac{(\Sigma a\delta)^2}{\Sigma a^2}.$$

Hat man also durch diese Gleichung den Werth von $\Sigma\varepsilon^2$ gefunden, so ist

$$P = \frac{N}{2} \cdot \frac{\Sigma a^2}{\Sigma\varepsilon^2},$$

und kennt man so den Werth von P, so ist der mittlere zu befürchtende Fehler des Resultates X gleich

$$\Phi = \frac{1}{2\sqrt{\pi P}} = \frac{0.282095}{\sqrt{P}},$$

der wahrscheinliche Fehler dieses Resultates

$$F = \frac{0.47694}{\sqrt{P}},$$

und die Genauigkeit (Präcision) dieser Bestimmung des Resultates, die Genauigkeit der einzelnen Beobachtungen als Einheit vorausgesetzt,

$$G = \frac{f}{F} = \sqrt{\Sigma a^2}.$$

Endlich ist der wahrscheinliche Fehler jeder einzelnen Beobachtung

$$f = 0.47694 \sqrt{\frac{\Sigma a^2}{P}},$$

und die wahrscheinlichen Gränzen desselben

$$f \pm \Delta f = f\left(1 \pm \frac{0.47694}{\sqrt{N}}\right).$$

I. Man bemerkt von selbst, daß diese Ausdrücke von P, Φ, F.. in die des §. 7. übergehen, wenn man hier die Größe $a = a_1 = a_2 ..$ gleich 1, und $\delta\ \delta_1\ \delta_2 ..$ gleich $x\ x_1\ x_2 ..$ setzt, wodurch $\Sigma a^2 = a^2 + a^2 + a^2 .. = N$ wird.

Auch zeigt schon der Ausdruck für P, daß das Gewicht des Resultates X desto größer wird, je größer die Anzahl N der

Beobachtungen, und je kleiner Σs^2 ist d. h. je genauer die Beobachtungen sind, und endlich je größer die Factoren $a\, a_1\, a_2 \ldots$ der Größe x in den Bedingungsgleichungen sind: übereinstimmend mit dem, was §. 11. I. gesagt worden ist. Je größer aber für alle diese Fälle die Größe P wird, desto kleiner werden auch die Größen Φ F und f.

§. 14. Wenden wir diese Ausdrücke auf folgendes Beyspiel an:

$$1.50\ x - 0.72 = \varepsilon$$
$$1.46\ x - 0.68 = \varepsilon_1$$
$$1.52\ x - 0.82 = \varepsilon_2$$
$$1.43\ x - 0.78 = \varepsilon_3$$
$$1.48\ x - 0.69 = \varepsilon_4.$$

Hier ist also

$$a = 1.50 \qquad a_1 = 1.46$$
$$\delta = 0.72 \qquad \delta_1 = 0.68 \text{ u. f.},$$

also auch

a^2	$= 2.2500$	δ^2	$= 0.5184$	$a\,\delta$	$= 1.0800$
a_1^2	$= 2.1316$	δ_1^2	$= 0.4624$	$a_1\,\delta_1$	$= 0.9928$
	2.3104		0.6724		1.2464
	2.0449		0.6084		1.1154
	2.1904		0.4761		1.0212
Σa^2	$= 10.9273$	$\Sigma\delta^2$	$= 2.7377$	$\Sigma a\,\delta$	$= 5.4558$

Daraus folgt

$$\Sigma\varepsilon^2 = \Sigma\delta^2 - \frac{(\Sigma a\,\delta)^2}{\Sigma a^2} = 0.0137, \text{ und}$$

$$X = \frac{\Sigma a\,\delta}{\Sigma a^2} = 0.49928, \text{ und da } N = 5 \text{ ist},$$

$$P = 1994.033$$
$$\Phi = 0.00632$$
$$F = 0.01068$$
$$G = 3.3056$$
$$f = 0.03531$$
$$f \pm \Delta f = \begin{matrix} 0.04284 \\ 0.02778 \end{matrix}$$

Die Größen P und G sind hier so groß, oder die Φ und F so klein, weil die einzelnen Beobachtungen so wenig von einander verschieden, oder weil die Beobachtungen so genau sind, wie auch der kleine Werth von f, des Fehlers jeder einzelnen Beobachtung, so wie der ebenfalls sehr kleine Werth von $\Sigma\varepsilon^2$, der Summe der Quadrate aller Beobachtungsfehler, zeigt.

In einem zweyten Beyspiele sey

$$\begin{aligned} 2.1\,x - 2.5 &= \varepsilon \\ 3.2\,x - 5.0 &= \varepsilon_1 \\ 2.4\,x - 4.5 &= \varepsilon_2 \\ 4.0\,x - 5.0 &= \varepsilon_3 \\ 3.5\,x - 4.1 &= \varepsilon_4. \end{aligned}$$

Addirt man alle diese Gleichungen, so erhält man, wenn man alle $\varepsilon = 0$ setzt, $15.2\,x - 21.1 = 0$, oder $x = 1.388$ für das arithmethische Mittel dieser Größe, welches aber nicht der wahrscheinlichste Werth X derselben ist.

Nach dem Vorhergehenden geben jene fünf Gleichungen

$\Sigma a^2 = 48.66$, $\Sigma\delta^2 = 93.31$, $\Sigma a\delta = 66.40$ und $N = 5$,

also ist

$$\Sigma\varepsilon^2 = 93.31 - 90.6075 = 2.7025,$$

der wahrscheinlichste Werth

$$\begin{aligned} X &= 1.36457 \\ P &= 45.01387 \\ \Phi &= 0.04204 \\ F &= 0.07109 \\ G &= 6.97567 \\ f &= 0.49588 \\ f \pm \Delta f &= \begin{cases} 0.60164 \\ 0.39012. \end{cases} \end{aligned}$$

Nach der Tafel des §. 6. ist für

$r = 1.8213861$ der Werth von $\Delta\Phi = \frac{r}{\sqrt{P}} = 0.271$, und für

$r = 2.32767$ der Werth von $\Delta\Phi = \frac{r}{\sqrt{P}} = 0.347$;

also kann man 100 gegen 1 wetten, daß der Fehler von X nicht größer als 0.271, und 1000 gegen 1 wetten, daß der Fehler von X nicht größer als 0.347 ist.

I. Auch hier könnte man, wie im §. 8., wieder die Größe $\Sigma\varepsilon^2$ vermeiden, indem man

$$f = 0.84535 \cdot \frac{\Sigma\varepsilon}{N}$$

einführt, wo $\Sigma\varepsilon$ die Summe der Größen

$$\varepsilon = Xa - \delta,\ \varepsilon_1 = Xa_1 - \delta_1,\ \varepsilon_2 = Xa_{11} - \delta_{11} \ldots,$$

diese Differenzen alle positiv genommen, bezeichnet. Setzt man nämlich diesen Werth von f gleich dem vorhergehenden

$$f = 0.47694 \sqrt{\frac{\Sigma a^2}{P}},$$

so findet man

$$P = 0.31831 \cdot \frac{N^2 \cdot \Sigma a^2}{(\Sigma\varepsilon)^2},$$

und dann die übrigen Größen Φ, F, f.. wie im §. 13. In unserem zweyten Beyspiele ist

$$\begin{aligned} \varepsilon &= Xa - \delta = 0.36566 \\ \varepsilon_1 &\ldots\ldots - 0.63328 \\ \varepsilon_2 &\ldots\ldots - 1.22496 \\ \varepsilon_3 &\ldots\ldots 0.45840 \\ \varepsilon_4 &\ldots\ldots 0.67610 \\ \Sigma\varepsilon &= 3.35840 \end{aligned}$$

wenn alle ε positiv genommen werden. Ferner ist

$$N = 5,\ \Sigma a^2 = 48.66,$$

also nach der letzten Gleichung

$$\begin{aligned} P &= 34.332 \\ \Phi &= 0.048 \\ F &= 0.081 \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Allein die Berechnung der Größe P nach der Gleichung

$$P = \frac{N}{2} \cdot \frac{\Sigma a^2}{\Sigma\varepsilon^2}$$

des §. 13. ist nicht nur genauer, sondern auch bequemer, da man den Werth von $\Sigma\varepsilon^2$ sogleich aus dem Ausdrucke

$$\Sigma\varepsilon^2 = \Sigma\delta^2 - \frac{(\Sigma a\delta)^2}{\Sigma a^2}$$

erhält, während man den Werth von $\Sigma\varepsilon$ nicht aus dem analogen Ausdrucke

$$\Sigma\varepsilon = X\Sigma a - \Sigma\delta = \frac{\Sigma a\delta}{\Sigma a} - \Sigma\delta$$

finden kann, weil vorausgesetzt wird, daß alle ε positiv genommen werden, daher man hier die Werthe aller ε unmittelbar aus den primitiven Gleichungen

$$\varepsilon = a\,X - \delta,\quad \varepsilon_1 = a_1\,X - \delta_1 \ldots$$

berechnen muß.

§. 15. Das Vorhergehende setzt voraus, daß die Werthe aller Bedingungsgleichungen unter sich gleich groß sind.

Ist aber von der Bedingungsgleichung

$\varepsilon = a\,x - \delta$ der Werth c, und von
$\varepsilon_1 = a_1\,x - \delta_1$ „ c_1,
$\varepsilon_2 = a_2\,x - \delta_2$ „ c_2 u. s. w.,

so hat man für die Größen X, P, Φ.. folgende Ausdrücke, wo wieder

$$\varepsilon = a\,X - \delta,\ \varepsilon_1 = a_1\,X - \delta_1$$

u. s. f. ist.

$$X = \frac{\Sigma c^2 a\delta}{\Sigma c^2 a^2},\quad P = \frac{N}{2}\cdot\frac{\Sigma c^2 a^2}{\Sigma c^2\varepsilon^2},\quad F = \frac{0.47694}{\sqrt{P}},$$

$$\Phi = \frac{0.28209}{\sqrt{P}},\quad G = \sqrt{\Sigma c^2 a^2}$$

$$f = 0.47694\sqrt{\frac{\Sigma c^2 a^2}{P}} = 0.47694\sqrt{\frac{\Sigma c^2 a^2}{P}}$$

$$f + \Delta f = f\left(1 \pm \frac{0.47694}{\sqrt{N}}\right).$$

Setzt man in diesen Ausdrücken

$$c = c_1 = c_2 \ldots = 1,$$

so ist

$$\Sigma c^2 a\delta = \Sigma a\delta,\ \Sigma c^2 a^2 = \Sigma a^2,\ \Sigma c^2\varepsilon^2 = \Sigma\varepsilon^2,$$

und man erhält die Gleichungen des §. 13. wieder.

Exempel. Seyen die Bedingungsgleichungen gegeben

$$2x - 2.5 = \varepsilon \text{ mit dem Werthe } c = 1$$
$$3x - 5.0 = \varepsilon_1 \text{ „ „ } c_1 = 2$$
$$4x - 6.0 = \varepsilon_2 \text{ „ „ } c_2 = 3,$$

so daß also die zweyte Beobachtung einen zwey Mahl, und die dritte einen drey Mal größeren Werth hat, als die erste.

Diese Gleichungen geben

$$c^2a^2 = 4 \qquad c^2a\delta = 5$$
$$36 \qquad 60$$
$$144 \qquad 216$$
$$\Sigma c^2a^2 = 184 \qquad \Sigma c^2a\delta = 281$$

also ist

$$X = \frac{\Sigma c^2 a\delta}{\Sigma c^2 a^2} = 1.52717.$$

Mit diesem Werthe von X erhält man

$$\varepsilon = aX - \delta = 3.05434 - 2.5 = 0.5543,$$

und eben so

$\varepsilon_1 = -0.4184$, und $\varepsilon^2 = 0.1088$, also ist

$$c^2\varepsilon^2 = 0.30736$$
$$0.70024$$
$$0.10653$$
$$\Sigma c^2\varepsilon^2 = 1.11413$$

Es ist daher

$$P = \frac{N}{2} \cdot \frac{\Sigma c^2 a\varepsilon}{\Sigma c^2 \varepsilon^2} = 247.7263,$$

$$F = \frac{0.47694}{\sqrt{P}} = 0.03030,$$

$$G = \sqrt{\Sigma c^2 a^2} = 13.565,$$

$$f = 0.47694 \sqrt{\frac{\Sigma c^2 a^2}{P}} = 0.41104.$$

§. 16. Allein man kann auch den Fall, wo die einzelnen Beobachtungen ungleiche Werthe haben, unmittelbar auf den des §. 13., wo sie alle gleiche Werthe haben, zurückführen, und sonach die Ausdrücke des §. 15. ganz entbehren.

Wenn man nämlich von den gegebenen Bedingungsgleichungen jede durch ihren Werth c c_1 c_2... multiplicirt, so kann man dann annehmen, daß die so veränderten Gleichungen alle denselben Werth haben, und daher auf sie die Ausdrücke des §. 13. unmittelbar anwenden.

Für das letzte Beyspiel hat man daher folgende Bedingungsgleichungen, die alle denselben Werth haben

$$2x - 2.5 = \varepsilon$$
$$6x - 10.0 = \varepsilon_1$$
$$12x - 18.0 = \varepsilon_2.$$

Behandelt man daher diese so modificirten Gleichungen nach §. 13., so erhält man

$a^2 =$	$\delta^2 =$	$a\delta =$
4	6.25	5
36	100	60
144	324	216
$\Sigma a^2 = 184$	$\Sigma\delta^2 = 430.25$	$\Sigma a\delta = 281$

Es ist daher

$$X = \frac{\Sigma a\delta}{\Sigma a^2} = 1.52717,$$

$$\Sigma\varepsilon^2 = \Sigma\delta^2 - \frac{(\Sigma a\delta)^2}{\Sigma a^2} = 430.25 - 429.1358 = 1.1142,$$

$$P = \frac{N}{2} \cdot \frac{\Sigma a^2}{\Sigma\varepsilon^2} = 247.7113,$$

$$F = \frac{0.47694}{\sqrt{P}} = 0.03030,$$

$$G = \sqrt{\Sigma a^2} = 13.565,$$

$$f = 0.47694 \sqrt{\frac{\Sigma a^2}{P}} = 0.41105,$$

welche Werthe mit den vorhergehenden genau übereinstimmen. Endlich sind noch die wahrscheinlichsten Fehler der ersten, zweyten und dritten Beobachtung in derselben Ordnung

$$\frac{f}{c} = 0.411, \quad \frac{f}{c_1} = 0.205, \quad \frac{f}{c_2} = 0.137.$$

§. 17. Man wird wohl nur selten im Stande seyn, diese Werthe $c\ c_1\ c_2 \ldots$ der einzelnen Beobachtungen, auch nur mit einiger Genauigkeit, anzugeben. Wenn man die einzelnen Bedingungsgleichungen, die man alle von gleichem Werthe voraussetzt, in Gruppen theilt, indem man mehrere derselben in eine Summe vereinigt, so kann man, wenn die erste, zweyte und dritte Gruppe aus $n\ n_1\ n_2 \ldots$ Beobachtungen entstanden ist, für die auf einander folgenden Bedingungsgleichungen dieser Gruppen die Werthe

$$c = \sqrt{n},\ c_1 = \sqrt{n_1},\ c_2 = \sqrt{n_2} \ldots$$

annehmen, und mit diesen Werthen von $c\ c_1\ c_2 \ldots$ wie im §. 16. verfahren.

Wenn man z. B. in dem Exempel des §. 14. die zwey ersten und die drey letzten Bedingungsgleichungen in eine Summe vereinigt, so erhält man zwey neue Bedingungsgleichungen

$$2.96\ x - 1.40 = \varepsilon \text{ mit dem Werthe } \ldots \sqrt{2}$$
$$4.43\ x - 2.29 = \varepsilon_1 \text{ „ „ „ } \ldots \sqrt{3},$$

und man wird daher die Gleichungen

$$2.96\ x\ \sqrt{2} - 1.40\ \sqrt{2} = \varepsilon$$
$$4.43\ x\ \sqrt{3} - 2.29\ \sqrt{3} = \varepsilon_1$$

nach den Vorschriften des §. 13. behandeln können. Da aber bey diesem Verfahren die Eintheilung in Gruppen willkührlich ist, (indem man z. B. hier auch die drey ersten, und die zwey letzten Gleichungen hätte summiren können u. s. w.), und da überhaupt hier nicht, wie im §. 15. oder 16. in der That geschehen ist, jede einzelne der primitiven Gleichungen, sondern nur willkührliche Gruppen derselben berücksichtigt werden, so wird man durch dieses Verfahren nur überhaupt genäherte Werthe von X, F u. s. w., aber nicht genau dieselben Werthe erhalten können, die man erhält, wenn man jede einzelne der ursprünglichen Bedingungsgleichungen nach der Methode des §. 13. behandelt.

§. 18. Bey diesen Gruppirungen, oder auch bey Beobachtungen mit multiplicirenden Instrumenten, an welchen nicht die Resultate der einzelnen Beobachtungen, sondern nur die Resul-

tate einer bestimmten Anzahl derselben abgelesen werden, pflegt man öfters die folgenden Gruppen mit allen vorhergehenden zu vereinigen, um so die allmählige Annäherung zu einem stehenden Resultate gleichsam dem Auge sichtbar zu machen. Um dieß durch ein Beyspiel zu zeigen, so wurde für die Polhöhe von Mailand durch einen Multiplicationskreis gefunden

aus 10 Beobachtungen	45° 28′ 5.″0	= a
aus 15 andern Beobachtungen	4.5	= a_1
aus 25 „ „	5.1	= a_2
aus 30 „ „	4.8	= a_3

Vereinigt man die beyden ersten dieser Beobachtungen, so erhält man

$$\frac{10\,a + 15\,a_1}{25} = 45°\ 28'\ 4.''7$$

als Resultat der 25 ersten Beobachtungen. Eben so geben die drey ersten Beobachtungen

$$\frac{10\,a + 15\,a_1 + 25\,a_2}{50} = 45°\ 28'\ 4.''9$$

als Resultat der 50 ersten Beobachtungen. Endlich gibt die Vereinigung aller Beobachtungen

$$\frac{10\,a + 15\,a_1 + 25\,a_2 + 30\,a_3}{80} = 45°\ 28'\ 4.''8625$$

als Resultat von 80 Beobachtungen. Wir haben daher aus

10 Beobachtungen	45° 28′ 5.″0	= A
25 „	4.7	= A_1
50 „	4.9	= A_2
80 „	4.8	= A_3

und diese Werthe von A A_1 A_2... zeigen die allmählige Annäherung an die zu findende Größe, während im Gegentheile die Werthe von a a_1 a_2... wieder die Übereinstimmung der partiellen Resultate unter einander darstellen.

Um beyden Zwecken zu genügen, wird man daher aus den Größen A A_1 A_2..., wenn diese gegeben sind, die Größen a a_1 a_2..., und umgekehrt, ableiten.

Sey also überhaupt

a das Resultat aus n Beobachtungen

a_1 „ „ n_1 „

a_2 „ „ n_2 u. s. f., und eben so

A „ „ n

A_1 „ „ $n + n_1$

A_2 „ „ $n + n_1 + n_2$ u. s. f.,

so hat man, wenn die Größen a a_1 a_2... gegeben sind,

$$A = a$$

$$A_1 = \frac{n a + n_1 a_1}{n + n_1}$$

$$A_2 = \frac{n a + n_1 a_1 + n_2 a_2}{n + n_1 + n_2}$$

$$A_3 = \frac{n a + n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3}{n + n_1 + n_2 + n_3} \text{ u. s. f.,}$$

und wenn die Größen A A_1 A_2... gegeben sind,

$$a = A$$

$$a_1 = \frac{n}{n_1} (A_1 - A) + A_1$$

$$a_2 = \frac{n + n_1}{n_2} (A_2 - A_1) + A_2$$

$$a_3 = \frac{n + n_1 + n_2}{n_3} (A_3 - A_2) + A_3$$

$$a_4 = \frac{n + n_1 + n_2 + n_3}{n_4} (A_4 - A_3) + A_4 \text{ u. s. f.}$$

In dem vorhergehenden Beyspiele ist

$n = 10$, $n_1 = 15$, $n_2 = 25$, $n_3 = 30$, und

$A = 5.0$, $A_1 = 4.7$, $A_2 = 4.9$, $A_3 = 4.8625$, also ist auch

$$a = 5.0,$$

$$a_1 = \frac{10}{15} (-0.3) + 4.7 = 4.5$$

$$a_2 = \frac{25}{25} (0.2) + 4.9 = 5.1$$

$$a_3 = \frac{5}{3} (-0.0375) + 4.8625 = 4.8 \text{ wie zuvor.}$$

Hätte man in einem zweyten Beyspiele aus den

10	ersten	Beobachtungen		erhalten	45° 28′ 5.″0	$= A$
20	„	„	„	„	5.55	$= A_1$
30	„	„	„	„	5.30	$= A_2$
40	„	„	„	„	5.275	$= A_3$
50	„	„	„	„	5.160	$= A_4$

so ist

$$n = n_1 = n_2 \ldots = 10,$$

und daher

$$a = 45° 28′ 5.″0$$
$$a_1 = 2A_1 - A = 6.1$$
$$a_2 = 3A_2 - 2A_1 = 4.8$$
$$a_3 = 4A_3 - 3A_2 = 5.2$$
$$a_4 = 5A_4 - 4A_3 = 4.7.$$

Drittes Capitel.

§. 19. Wir wollen nun auf eine ähnliche Weise zwey unbekannte, durch mehrere Gleichungen gegebene Größen, zu bestimmen suchen. Um uns auch hier gleich durch ein Beyspiel zu erklären, nehmen wir an, daß die Secundenpendellänge A für die geographische Breite φ durch den Ausdruck gegeben werde

$$A = 439.23 + 2.39 \operatorname{Sin}^2 \varphi$$

in Pariser Linien, in welchen aber die beyden constanten Größen 439.23 und 2.39 noch nicht als ganz genau angesehen werden, und daher einer Verbesserung bedürfen. Seyen diese zu suchenden verbesserten Werthe

$$439.23 + x, \text{ und } 2.39 + y.$$

Hat man nun unter der Breite φ diese Pendellänge durch unmittelbare Beobachtung gleich B gefunden, und nimmt man an, daß auch diese Beobachtung nicht ganz richtig ist, und daß der wahre, noch unbekannte Werth dieses Resultates gleich $B + \varepsilon$ ist, wo also ε den Fehler der Beobachtung bezeichnet, so hat man, da sowohl $B + \varepsilon$, als auch

$$439.23 + x + (2.39 + y) \operatorname{Sin}^2 \varphi$$

den wahren Ausdruck der Pendellänge vorstellt,

$$B + \varepsilon = 439.23 + x + (2.39 + y) \operatorname{Sin}^2 \varphi,$$

und wenn man davon die vorhergehende Gleichung

$$A = 439.23 + 2.39 \operatorname{Sin}^2 \varphi$$

abzieht,

$$B - A + \varepsilon = x + y \operatorname{Sin}^2 \varphi,$$

oder wenn man den Unterschied zwischen dem Resultate B der unmittelbaren Beobachtung, und dem Resultate A der Berechnung nach dem oben aufgestellten Ausdruck, d. h. wenn man $B - A = \delta$ setzt

$$\varepsilon = x + y \operatorname{Sin}^2 \varphi - \delta,$$

welches daher die Bedingungsgleichung dieser Beobachtung ist.

Wir wollen diese Bedingungsgleichung überhaupt durch

$$\varepsilon = a\,x + b\,y - \delta$$

darstellen. Eine zweyte Beobachtung gibt eben so

$$\varepsilon_1 = a_1\,x + b_1\,y - \delta_1,$$

eine dritte

$$\varepsilon_2 = a_2\,x + b_2\,y - \delta_2 \text{ u. s. w.},$$

und es wird nun darum zu thun seyn, diejenigen Werthe von x und y zu finden, welche allen diesen Bedingungsgleichungen am besten entsprechen.

Diese Werthe von x und y werden aber wieder, wie oben, diejenigen seyn, für welche die Summe der Quadrate der Beobachtungsfehler

$$\varepsilon^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots = \Sigma\varepsilon^2$$

ein Kleinstes ist, oder für welche man hat

$$d.\Sigma\varepsilon^2 = 0.$$

Da aber die Größen x und y im Allgemeinen von einander unabhängig sind, so ist die letzte Gleichung folgenden beyden gleich geltend

$$\left(\frac{d.\Sigma\varepsilon}{dx}\right)^2 = 0, \text{ und } \left(\frac{d.\Sigma\varepsilon}{dy}\right)^2 = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen gibt, da

$$\varepsilon = a\,x + b\,y - \delta,$$

also auch

$$\varepsilon^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + 2abxy - 2a\delta x - 2b\delta y + \delta^2 \text{ ist},$$

$$a^2\,x + a\,(b\,y - \delta)$$
$$+ a_1^2\,x + a_1\,(b_1\,y - \delta_1)$$
$$+ a_2^2\,x + a_2\,(b_2\,y - \delta_2) + \ldots$$

oder

$$x\Sigma a^2 + y\Sigma ab - \Sigma a\delta = 0 \ldots . (I),$$

und eben so gibt die zweyte jener Gleichungen

$$b^2\ y + b\ (a\ x - \delta)$$
$$b_1^2\ y + b_1\ (a_1\ x - \delta_1)$$
$$b_2^2\ y + b_2\ (a_2\ x - \delta_2) + \ldots$$

oder

$$y\Sigma b^2 + x\Sigma a b - \Sigma b\delta = 0 \ldots . (II).$$

Diese beyden Gleichungen (I) und (II) geben also die gesuchten wahrscheinlichsten Werthe von x und y, die wir wieder durch X und Y bezeichnen wollen.

Man erhält nämlich aus diesen beyden Gleichungen durch Elimination für diese wahrscheinlichsten Werthe die Ausdrücke

$$X = \frac{\Sigma b^2 \Sigma a\delta - \Sigma a b \Sigma b\delta}{\Sigma a^2 \Sigma b^2 - (\Sigma a b)^2}, \text{ und}$$

$$Y = \frac{\Sigma a^2 \Sigma b\delta - \Sigma a b \Sigma a\delta}{\Sigma a^2 \Sigma b^2 - (\Sigma a b)^2}.$$

Nennt man der Kürze wegen die Größe

$$\Sigma a^2 \Sigma b^2 - (\Sigma a b)^2 = k,$$

so ist

$$X = \frac{\Sigma b^2 \Sigma a\delta - \Sigma a b \Sigma b\delta}{k}$$

$$Y = \frac{\Sigma a^2 \Sigma b\delta - \Sigma a b \Sigma a\delta}{k}.$$

§. 20. Kennt man aber diese wahrscheinlichsten Werthe X und Y der beyden Größen x und y, so findet man die Gewichte P_x und Q_y dieser Bestimmungen der Resultate von X und Y, so wie die wahrscheinlichsten Fehler F_x und F_y dieser beyden Größen durch folgende, den bereits vorhin gegebenen analoge Ausdrücke

$$P_x = \frac{N}{2} \cdot \frac{k}{\Sigma b^2 \Sigma\varepsilon^2},$$

$$P_y = \frac{N}{2} \cdot \frac{k}{\Sigma a^2 \Sigma\varepsilon^2},$$

wo $\varepsilon = aX + bY - \delta$, $\varepsilon_1 = a_1X + b_1Y - \delta_1 \ldots$ ist, oder wo ε den Werth von $ax + by\delta$ bezeichnet, wenn man in dem

letzten Ausdrucke für x und y ihre im §. 19. gefundenen wahrscheinlichsten Werthe X und Y setzt.

Die wahrscheinlichsten Fehler dieser Bestimmungen der Resultate von X und Y sind

$$\text{für } X \ldots F_x' = \frac{0.47694}{\sqrt{P x}},$$

$$\text{für } Y \ldots F_y = \frac{0.47694}{\sqrt{P y}},$$

und eben so sind die mittleren zu befürchtenden Fehler

$$\text{für } X \ldots \Phi_x = \frac{0.28209}{\sqrt{P x}},$$

$$\text{für } Y \ldots \Phi_y' = \frac{0.28209}{\sqrt{P y}}.$$

§. 21. Noch ist übrig, die Genauigkeit oder die Präcision Gx und Gy dieses Resultates X und Y, und endlich die wahrscheinlichen Fehler f der einzelnen Beobachtung und die Gränzen dieser Fehler $f \pm \Delta f$ zu finden.

Zu diesem Zwecke wollen wir die beyden Gleichungen (I) und (II) so ausdrücken

$$\varepsilon = -\Sigma a \delta + x \Sigma a^2 + y \Sigma a b$$
$$v = -\Sigma b \delta + y \Sigma b^2 + x \Sigma a b.$$

Leitet man aus ihnen durch die bekannte Methode der Elimination zwey andere Gleichungen ab, welche die Größen x und y durch ε und v ausdrücken, und welche die Form haben

$$\left.\begin{aligned} x &= L + A\,\varepsilon + B\,v \\ y &= L' + A'\,\varepsilon + B'\,v \end{aligned}\right\} \ldots (III),$$

so sind $x = L$ und $y = L'$ die wahrscheinlichsten Werthe dieser Größen, oder es ist

$$X = L \text{ und } Y = L'$$

in Übereinstimmung mit §. 19., weil dann $\varepsilon = v = 0$ gesetzt wird. Die Genauigkeit dieser Bestimmung von X und Y aber ist,

wenn man die Genauigkeit der einzelnen Beobachtungen zur Einheit annimmt,

$$\text{für } X \ldots G_x = \frac{1}{\sqrt{A}},$$

$$\text{für } Y \ldots G_y = \frac{1}{\sqrt{B}}.$$

Endlich ist, wie §. 9., der wahrscheinliche Fehler f jeder einzelnen Beobachtung

$$f = F_x \cdot G_x = F_y \cdot G_y.$$

Um auch diese Ausdrücke auf ein Beyspiel anzuwenden, seyen die drey folgenden Bedingungsgleichungen gegeben

$$\begin{aligned} \varepsilon &= x + y - 3 \\ \varepsilon_1 &= x - 2y + 4 \\ \varepsilon_2 &= 3x - y - 2, \end{aligned}$$

so hat man

$$\Sigma a^2 = 11,\ \Sigma b^2 = 6,\ \Sigma ab = -4$$
$$\Sigma b\delta = 9,\ \Sigma a\delta = 5,\ k = 50,$$

und daher die wahrscheinlichsten Werthe der beyden Größen

$$X = \frac{33}{25} = 1.32000,$$

$$Y = \frac{119}{50} = 2.38000.$$

Mit diesen Werthen erhält man

$$\varepsilon = X + Y - 3 = 0.70,$$

und eben so

$$\varepsilon_1 = 0.56,\ \varepsilon_2 = -0.42,$$

also auch

$$\Sigma \varepsilon^2 = 0.9800,$$

und daher für die beyden gefundenen Bestimmungen von X und Y die Gewichte

$$P_x = \frac{3}{2} \cdot \frac{50}{5.88} = 12.7551,$$

$$P_y = \frac{3}{2} \cdot \frac{50}{10.78} = 6.95733.$$

Die wahrscheinlichsten Fehler

$$F_x = 0.133542$$
$$F_y = 0.180817.$$

Die mittleren zu befürchtenden Fehler

$$\Phi_x = 0.07898$$
$$\Phi_y = 0.10695.$$

Weiter geben die beyden Gleichungen (I) und (II)

$$\varepsilon = 11\,x - 4\,y - 5$$
$$v = 6\,y - 4\,x - 9,$$

woraus man durch Elimination erhält

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{33}{25} + \frac{3}{25}\varepsilon + \frac{2}{25}v \\ y &= \frac{119}{50} + \frac{4}{50}\varepsilon + \frac{11}{50}v \end{aligned}\right\} \ldots \text{III},$$

woraus sofort die wahrscheinlichsten Werthe der Größen x und y folgen

$$X = \frac{33}{25}, \text{ und } Y = \frac{119}{50}$$

wie zuvor, und die Genauigkeit dieser beyden Resultate

$$G_x = \sqrt{\frac{25}{3}} = 2,88675$$

$$G_y = \sqrt{\frac{50}{11}} = 2.13201.$$

Endlich ist der Fehler jeder einzelnen Beobachtung

$$f = F_x\,G_x = F_y\,G_y = 0.38550.$$

Man sieht, daß in diesem Beyspiele die Größe X genauer bestimmt ist, als Y, und zwar in dem Verhältniß von

$$\frac{2.88675}{2.13201} = \frac{1.354}{1}.$$

Nach der Tafel des §. 6. findet man für diese Bestimmung der Größe X folgende Gränzen

$$r = 1 \text{ gibt } \Delta\varphi = \frac{r}{\sqrt{P_x}} = \frac{1}{\sqrt{12.7551}} = 0.2800,$$

also kann man $\frac{w}{1-w} = 5.357$ gegen 1 wetten, daß der Fehler von X nicht größer als 0.28 ist.

Für $r = 2.32767$ ist

$$\Delta\varphi = \frac{r}{\sqrt{P_x}} = \frac{2.32767}{\sqrt{12.7551}} = 0.672,$$

also kann man $\frac{w}{1-w} = 1000$ gegen 1 wetten, daß der Fehler von X nicht größer als 0.67 ist.

Für die Größe Y, die weniger genau bestimmt ist, sind für dieselben Wahrscheinlichkeiten diese Grenzen der Fehler größer. So ist für

$$r = 1 \ldots \Delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{P_y}} = \frac{1}{\sqrt{6.9573}} = 0.379, \text{ und}$$

$$\frac{w}{1-w} = 5.357, \text{ und für}$$

$$r = 2.32767, \quad \Delta\varphi = \frac{r}{\sqrt{P_y}} = 0.8825, \text{ und}$$

$$\frac{w}{1-w} = 1000,$$

oder man kann 1000 gegen 1 wetten, daß der Fehler von Y kleiner als 0.8825 ist, während dasselbe Verhältniß bey X schon für den kleinen Fehler 0.672 Statt hat.

§. 21. Man kann aber auch die Einführung der Größen ε und v, oder die Entwickelung der Gleichungen (III) ganz umgehen, und die Auflösung auf folgende einfache Ausdrücke zurückführen. Ist

$$k = \Sigma a^2 . \Sigma b^2 - (\Sigma ab)^2$$

so sind die wahrscheinlichsten Werthe von x und y, wie zuvor

$$X = \frac{\Sigma b^2 \Sigma a\delta - \Sigma a\delta \Sigma b\delta}{k},$$

$$Y = \frac{\Sigma a^2 \Sigma b\delta - \Sigma ab \Sigma a\delta}{k}.$$

Und von diesen Resultaten sind die Gewichte

$$P_x = \frac{Nk}{2\Sigma b^2 \Sigma \varepsilon^2}, \quad P_y = \frac{Nk}{2\Sigma a^2 \Sigma \varepsilon^2},$$

wo $\varepsilon = aX + bY - \delta$, $\varepsilon_1 = a_1 X + b_1 Y - \delta_1$ u. s. f. ist.
Ferner sind die mittleren zu befürchtenden Fehler dieser Resultate

$$\Phi_x = \frac{0.28209}{\sqrt{P_x}}, \quad \Phi_y = \frac{0.28209}{\sqrt{P_y}},$$

und die wahrscheinlichsten Fehler derselben

$$F_x = \frac{0.47694}{\sqrt{P_x}}, \quad F_y = \frac{0.47694}{\sqrt{P_y}}.$$

Die Genauigkeit der Bestimmung dieser Resultate ist

$$G_x = \sqrt{\frac{k}{\Sigma b^2}}; \quad G_y = \sqrt{\frac{k}{\Sigma a^2}},$$

und endlich der Fehler jeder einzelnen Beobachtung

$$f = 0.47694 \sqrt{\frac{2\Sigma \varepsilon^2}{N}}.$$

In unserem Beyspiele ist in derselben Ordnung

$$k = 50, \quad X = \frac{33}{25}, \quad Y = \frac{119}{50},$$

$P_x = 12.75510$	$P_y = 6.95733$
$\Phi_x = 0.07898$	$\Phi_y = 0.10695$
$F_x = 0.13354$	$F_y = 0.18082$
$G_x = 2.88675$	$G_y = 2.13201$

$$f = 0.38550.$$

I. Zwischen den Größen F und G hat man überhaupt folgende Ausdrücke

$$G_x = \sqrt{\frac{k}{\Sigma b^2}} = \sqrt{\frac{2P_x \cdot \Sigma \varepsilon^2}{N}},$$

$$G_y = \sqrt{\frac{k}{\Sigma a^2}} = \sqrt{\frac{2P_y \cdot \Sigma \varepsilon^2}{N}},$$

$$F_x = \frac{f}{G_x} = 0.47694 \sqrt{\frac{2\Sigma \varepsilon^2 \Sigma b^2}{Nk}},$$

$$F_y = \frac{f}{G_y} = 0.47694 \sqrt{\frac{2\Sigma \varepsilon^2 \Sigma a^2}{Nk}}.$$

II. Sind die einzelnen Beobachtungen von ungleicher Güte, und ist z. B. $c\ c_1\ c_2 \ldots$ der Werth der ersten, zweyten und dritten Beobachtung, so wird man, wie im §. 16., die gegebenen Bedingungsgleichungen, außer dem ε, durch die Größen $c\ c_1\ c_2 \ldots$ multipliciren, und dann mit ihnen, wie zuvor, verfahren.

Viertes Capitel.

§. 22. Nehmen wir nun an, daß man durch eine Reihe von Beobachtungen drey unbekannte Größen x y z so bestimmen soll, daß sie diesen Beobachtungen am besten entsprechen. Hier werden also die Bedingungsgleichungen folgende Form haben

$$\begin{aligned} \varepsilon &= a\,x + b\,y + c\,z - \delta \\ \varepsilon_1 &= a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z - \delta_1 \\ \varepsilon_2 &= a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z - \delta_2 \\ \varepsilon_3 &= a_3\,x + b_3\,y + c_3\,z - \delta_3 \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Sucht man daraus wieder diejenigen Gleichungen, welche die Summe der Quadrate der Fehler, oder welche die Größe

$$\varepsilon^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots = \Sigma\varepsilon^2$$

zu einem Minimum machen, oder welche den Ausdrücken

$$\left(\frac{d.\Sigma\varepsilon}{dx}\right) = 0,\ \left(\frac{d.\Sigma\varepsilon}{dy}\right) = 0,\ \left(\frac{d.\Sigma\varepsilon}{dz}\right) = 0$$

entsprechen, so hat man

$$\left.\begin{aligned} 0 &= X\Sigma a^2 + Y\Sigma ab + Z\Sigma ac - \Sigma a\delta \\ 0 &= X\Sigma ab + Y\Sigma b^2 + Z\Sigma bc - \Sigma b\delta \\ 0 &= X\Sigma ac + Y\Sigma bc + Z\Sigma c^2 - \Sigma c\delta \end{aligned}\right\} \ldots(I),$$

und die Werthe von X, Y und Z, welche man aus diesen drey Gleichungen (I) durch Elimination findet, werden die gesuchten wahrscheinlichsten Werthe von x y z seyn.

Setzt man dann

$$k = \Sigma a^2 . \Sigma b^2 . \Sigma c^2 - \Sigma a^2 . (\Sigma b c)^2 - \Sigma b2(b^2) . (\Sigma a c)^2 - \Sigma c^2 . (\Sigma a b)^2 + 2 \Sigma a b . \Sigma a c . \Sigma b c,$$

so sind die Gewichte dieser drey Bestimmungen von

$$X \ldots P_x = \frac{N}{2\Sigma\varepsilon^2} \cdot \frac{k}{\Sigma b^2 . \Sigma c^2 - (\Sigma b c)^2},$$

$$Y \ldots P_y = \frac{N}{2\Sigma\varepsilon^2} \cdot \frac{k}{\Sigma a^2 . \Sigma c^2 - (\Sigma a c)^2},$$

$$Z \ldots P_z = \frac{N}{2\Sigma\varepsilon^2} \cdot \frac{k}{\Sigma a^2 . \Sigma b^2 - (\Sigma a b)^2}.$$

Ist so P bekannt, so hat man für die mittleren zu befürchtenden Fehler

$$\Phi_x = \frac{0.28209}{\sqrt{P_x}}, \quad \Phi_y = \frac{0.28209}{\sqrt{P_y}}, \quad \Phi_z = \frac{0.28209}{\sqrt{P_z}},$$

für die wahrscheinlichsten Fehler

$$F_x = \frac{0.47694}{\sqrt{P_x}}, \quad F_y = \frac{0.47694}{\sqrt{P_y}}, \quad F_z = \frac{0.47694}{\sqrt{P_z}},$$

für die Genauigkeit dieser drey Resultate X, Y und Z ist

$$G_x = \sqrt{\frac{2 P_x . \Sigma\varepsilon^2}{N}}, \quad G_y = \sqrt{\frac{2 P_y . \Sigma\varepsilon^2}{N}},$$

$$G_z = \sqrt{\frac{2 P_z . \Sigma\varepsilon^2}{N}},$$

und endlich ist der wahrscheinlichste Fehler jeder einzelnen Beobachtung

$$f = 0.47694 \sqrt{\frac{2\Sigma\varepsilon^2}{N}}.$$

Sind die einzelnen Beobachtungen von ungleichem Werth c c_1 c_2..., so multiplicirt man sie durch diese Werthe, und verfährt dann wie zuvor.

Exempel. Seyen die Gleichungen gegeben

$\varepsilon = x + y - 2z - 1$.. mit dem Werthe $c = 1$

$\varepsilon_1 = \frac{1}{3}x - y + \frac{1}{3}z - 1$.. „ „ „ $c_1 = 3$

$\varepsilon_2 = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y - \frac{1}{2}z - \frac{1}{3}$.. „ „ „ $c_2 = 6$

$\varepsilon_3 = \frac{1}{12}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{12}z - \frac{1}{4}$.. „ „ „ $c_3 = 12$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Ordnung durch c, c_1, c_2 und c_3, so erhält man die reducirten Bedingungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= x + y - 2z - 1 \\ \varepsilon_1 &= x - 3y + z - 3 \\ \varepsilon_2 &= 2x + y - 3z - 2 \\ \varepsilon_3 &= x - 4y + z - 3 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (A).$$

Diese Gleichungen geben

$$\begin{aligned} \Sigma a^2 &= 7 & \Sigma ab &= -4 & \Sigma a\delta &= +11 \\ \Sigma b^2 &= 27 & \Sigma ac &= -6 & \Sigma b\delta &= -18 \\ \Sigma c^2 &= 15 & \Sigma bc &= -12 & \Sigma c\delta &= -2 \end{aligned}$$

und daher sind die Gleichungen (I)

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 7X - 4Y - 6Z - 11 \\ 0 &= 4X - 27Y + 12Z - 18 \\ 0 &= 6X + 12Y - 15Z - 2 \end{aligned}\right\}$$

woraus man durch Elimination die wahrscheinlichsten Werthe X Y Z der Größen x y z erhält

$$X = +1.9231, \quad Y = -0.1538, \quad Z = +0.5128.$$

Substituirt man diese Werthe von X Y Z in den Gleichungen (A), so erhält man

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -0.2563, & \varepsilon_1 &= -0.1027, \\ \varepsilon_2 &= +0.1540, & \varepsilon_3 &= +0.0511. \end{aligned}$$

Also ist $\Sigma\varepsilon^2 = 0.1025$ und $k = 39$, so wie $N = 4$. Damit erhält man die Gewichte;

$$P_x = 2.9136, \quad P_y = 11.0211, \quad P_z = 4.3957.$$

Die mittleren zu befürchtenden Fehler

$$\Phi_x = 0.1652, \quad \Phi_y = 0.0850, \quad \Phi_z = 0.1345.$$

Die wahrscheinlichsten Fehler dieser drey Resultate

$$F_x = 0.2794, \quad F_y = 0.1437, \quad F_z = 0.2275,$$

und die Genauigkeit dieser Resultate

$$G_x = 0.3865, \quad G_y = 0.7518, \quad G_z = 0.4748.$$

Endlich ist der wahrscheinlichste Fehler jeder einzelnen Beobachtung

$$f = 0.47694 \sqrt{\frac{2\Sigma\varepsilon^2}{N}} = 0.1080,$$

und daher der wahrscheinlichste Fehler der

1. Beobachtung $\frac{f}{c} = 0.108,$
2. „ $\frac{f}{c_1} = 0.036,$
3. „ $\frac{f}{c_2} = 0.018,$
4. „ $\frac{f}{c_3} = 0.009.$

Man sieht aus diesen Ausdrücken, daß von den drey Größen der Werth von Y am genauesten, und der von X am wenigsten genau, und daß Y nahe noch einmal so genau, als X bestimmt ist. Auch kann man, nach §. 6., 1000 gegen 1 wetten, daß der Fehler von

X nicht größer als $\pm$ 1.36
Y „ „ „ $\pm$ 0.70
Z „ „ „ $\pm$ 1.11 ist.